EGZAMIN MATURALNY
MATEMATYKA
Poziom podstawowy
ZBIÓR ZADAŃ

Materiały pomocnicze dla uczniów i nauczycieli

Centralna Komisja Egzaminacyjna
2015

Publikacja opracowana przez zespół koordynowany przez **Renatę Świrko** działający w ramach projektu *Budowa banków zadań* realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną pod kierunkiem Janiny Grzegorek.

Autorzy
Barbara Andrzejewska (kierownik zespołu przedmiotowego)
Agnieszka Borowska
dr Wiktor Bartol (kierownik zespołu przedmiotowego)
Henryk Dąbrowski
dr Jacek Dymel
Anna Kleinschmidt
Marzena Mazur
Teresa Pypeć
Leszek Sochański
dr Edward Stachowski

Komentatorzy
dr Waldemar Pałuba
Andrzej Daszke
Hanna Schulte-Noelle

Opracowanie redakcyjne
Jakub Pochrybniak

Redaktor naczelny
Julia Konkołowicz-Pniewska

Zbiory zadań opracowano w ramach projektu *Budowa banków zadań*,
Działanie 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych,
Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Spis treści

Wprowadzenie

Prezentowany zbiór zadań jest przeznaczony przede wszystkim dla osób zamierzających zdawać egzamin maturalny z matematyki w formule obowiązującej od 2015 roku. Zbiór ten może być również wykorzystywany przez nauczycieli matematyki w procesie dydaktycznym jako materiał uzupełniający, ponieważ zawiera wiele zadań w nowym stylu, o interesującej, zmuszającej do myślenia treści; także takie, których nauczyciele nie znajdą w obecnych na rynku publikacjach.

W zbiorze zamieszczono 134 zadania, które mogą wspomóc uczniów w trakcie przygotowań do zdawania obowiązkowego egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym.

Zadania zostały pogrupowane tematycznie, zgodnie z następującą klasyfikacją:

1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności;
2. Funkcje;
3. Ciągi;
4. Geometria (planimetria, stereometria, geometria analityczna płaszczyzny, trygonometria);
5. Prawdopodobieństwo i kombinatoryka (wraz z elementami statystyki).

Zgodnie z wymaganiami maturalnymi w zbiorze znajdują się zarówno zadania zamknięte, w których tylko jedna z podanych odpowiedzi jest prawdziwa, jak i zadania otwarte, wymagające przedstawienia pełnego rozwiązania, w tym zadania na dowodzenie.

Uczeń samodzielnie przygotowujący się do egzaminu maturalnego, który nie będzie miał pomysłu na rozwiązanie zadania, może liczyć na pomoc w postaci wskazówek oraz komentarzy towarzyszących każdemu zadaniu, podpowiadających kolejne etapy rozwiązania i uzasadniających przyjętą strategię. Do wszystkich zadań zamkniętych podano prawidłowe odpowiedzi, co pozwoli uczniowi sprawdzić poprawność ich rozwiązania. Do zadań otwartych przedstawiono pełne rozwiązania, niekiedy na kilka sposobów. Tym samym uczeń bez pomocy nauczyciela, podążając za wskazówkami i śledząc poszczególne etapy rozwiązania, będzie w stanie pokonać zasadnicze trudności zadania lub w pełni je rozwiązać.

Ponadto do każdego zadania podano wymagania egzaminacyjne ogólne i szczegółowe z obecnie obowiązującej *Podstawy programowej* dla III (gimnazjum) i IV (szkoła ponadgimnazjalna) etapu kształcenia.

Mamy nadzieję, że proponowany zbiór zadań będzie pomocny uczniom w przygotowaniu się do egzaminu maturalnego z matematyki, a nauczycielom pozwoli wzbogacić proces nauczania o ciekawe zadania i ułatwi im realizację najważniejszego celu kształcenia matematycznego: uczeń kończący kolejny etap edukacyjny będzie znał i rozumiał pojęcia matematyczne, ale przede wszystkim będzie umiał stosować wiedzę teoretyczną w rozwiązywaniu problemów, również w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Autorzy

1. Zadania

1.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 1.

Na początku roku akademickiego mężczyźni stanowili 40% wszystkich studentów. Na koniec roku liczba wszystkich studentów zmalała o 10% i wówczas okazało się, że mężczyźni stanowią $33\frac{1}{3}\%$ wszystkich studentów. O ile procent zmieniła się liczba mężczyzn na koniec roku w stosunku do liczby mężczyzn na początku roku?

Komentarz do zadania

Najpierw musisz ustalić, jakim procentem (bądź ułamkiem) liczby wszystkich studentów przyjętych na początku roku jest liczba mężczyzn na koniec roku. Jeśli liczba studentów na początku roku wynosi x i wśród nich jest 40% mężczyzn, to liczba mężczyzn w zależności od x wynosi $0{,}4x$. Na koniec roku liczba wszystkich studentów zmniejszyła się o 10%. Zatem ile wyniosła w zależności od x? Mężczyźni stanowili wtedy $33\frac{1}{3}\%$ tej liczby studentów, czyli ile w zależności od x? Następnie musisz policzyć, jakim procentem (bądź ułamkiem) liczby mężczyzn na początku roku (100%) jest liczba mężczyzn na koniec roku. Teraz już można odpowiedzieć na pytanie, o ile procent zmieniła się liczba mężczyzn na koniec roku w stosunku do liczby mężczyzn na początku roku.

Rozwiązanie

Przeprowadzamy analizę zadania.

	Liczba studentów	**Liczba mężczyzn**
Początek roku	x	$0{,}4x$
Koniec roku	$0{,}9x$	$33\frac{1}{3}\% \cdot 0{,}9x = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} x = 0{,}3x$

Ustalamy, jakim procentem liczby mężczyzn na początku roku jest liczba mężczyzn na koniec roku:

$0{,}4x$ — 100%,

$0{,}3x$ — $p\%$.

Zatem $p = 75\%$.

Liczba mężczyzn na koniec roku zmalała o 25% w stosunku do liczby mężczyzn na początku roku.

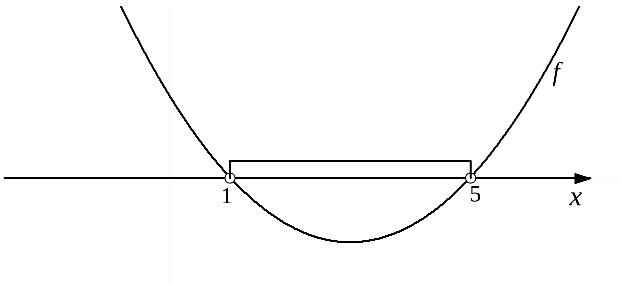
Zadanie 2.

Funkcja f jest funkcją kwadratową. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f\left(x\right)<0$ jest przedział $\left(1,5\right)$. Rozwiąż nierówność $-f(x+3)<0$.

Komentarz do zadania

Czy wiesz, jak może wyglądać wykres funkcji kwadratowej, której zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)<0$ są liczby rzeczywiste z przedziału $\left(1,5\right)$?

Aby rozwiązać zadanie, naszkicuj wykres funkcji $y=-f(x+3)$.



Z podanego wzoru wynika, że należy wykres funkcji *f* przesunąć w lewo wzdłuż osi *Ox* o trzy jednostki. Miejscami zerowymi będą odpowiednio liczby $x=-2$ i $x=2$.

Drugą czynnością będzie przekształcenie wykresu funkcji $y=f(x+3)$ przez symetrię względem osi *Ox*. Zauważ, że to przekształcenie zmienia kierunek ramion paraboli, ale nie zmienia punktów leżących na osi *Ox*, więc liczby $x=-2$ i $x=2$ są miejscami zerowymi funkcji $y=f(x+3)$.

Zadanie 3.

Wartość wyrażenia $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-16}}{-8}$ jest równa

A. $2^{\frac{1}{3}}$ B. $2^{\frac{1}{2}}$ C. 2^{-1} D. 2^{-2}

Zadanie 4.

Odwrotnością liczby $2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ jest liczba

A. $-2^{\frac{11}{2}}$ B. $-2^{-\frac{11}{2}}$ C. $2^{-\frac{11}{2}}$ D. $2^{\frac{11}{2}}$

Zadanie 5.

Liczba $\sqrt[3]{4^{-1}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}$ jest równa

A. $2^{\frac{1}{6}}$ B. $2^{\frac{1}{4}}$ C. $2^{\frac{1}{3}}$ D. $2^{\frac{11}{12}}$

Zadanie 6.

Dane są liczby $a = \log 3$, $b = \log 2$. Wyznacz logarytm dziesiętny z liczby 72 za pomocą a i b.

Zadanie 7.

Liczba o 2 większa od liczby $\log_5 4$ jest równa

A. $\log_5 6$ B. $\log_5 8$ C. $\log_5 29$ D. $\log_5 100$

Zadanie 8.

Na lokacie złożono 1000 zł przy rocznej stopie procentowej p% (procent składany). Odsetki naliczane są co kwartał. Po upływie roku wielkość kapitału na lokacie będzie równa

A. $1000\left(1+\frac{4p}{100}\right)$ B. $1000\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$ C. $1000\left(1+\frac{p}{400}\right)$ D. $1000\left(1+\frac{p}{400}\right)^4$

Zadanie 9.

Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Stosunek $a:b:c$ jest równy $3:5:7$. Które zdanie jest **fałszywe**?

A. Liczba c jest o 12,5% mniejsza od liczby $a+b$.

B. Liczba a stanowi 20% liczby $a+b+c$.

C. Liczba a stanowi 25% liczby $b+c$.

D. Liczba b to 60% liczby c.

Zadanie 10.

Nominalna stopa oprocentowania lokaty wynosi 3% w stosunku rocznym (bez uwzględnienia podatku). Odsetki kapitalizowane są na koniec każdego kolejnego okresu czteromiesięcznego. Oblicz, jaką kwotę wpłacono na tę lokatę, jeśli na koniec ośmiu miesięcy oszczędzania na rachunku lokaty było o 916,56 zł więcej niż przy jej otwarciu.

Zadanie 11.

W pewnej szkole przez trzy kolejne lata zmieniała się liczba uczniów. W pierwszym roku liczba uczniów zmalała i na koniec roku była o 10% mniejsza niż na początku. W drugim roku wzrosła i ukończyło go 20% więcej uczniów niż pierwszy. O ile procent, w stosunku do liczby uczniów kończących drugi rok, zmniejszyła się ich liczba w następnym roku, jeśli na koniec trzeciego roku było tyle samo uczniów co na początku pierwszego? Wynik zaokrąglij do $0,1\%$.

Zadanie 12.

Autobus nazywamy przepełnionym, jeżeli w pewnym momencie znajduje się w nim co najmniej 50 pasażerów. Dwóch inspektorów monitoruje liczbę pasażerów w tych samych dziesięciu autobusach. Jeden z nich obliczył, jaki procent wszystkich autobusów stanowią autobusy przepełnione, a drugi — jaki procent wszystkich pasażerów w 10 autobusach stanowili pasażerowie podróżujący przepełnionymi pojazdami. Wiadomo, że liczba autobusów przepełnionych należy do zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$. Który z inspektorów otrzymał większą liczbę?

Zadanie 13.

Dane są liczby

$$a = 3\log_3 2 - \log_3 16,$$

$$b = 2\log_3 6 - \log_3 18.$$

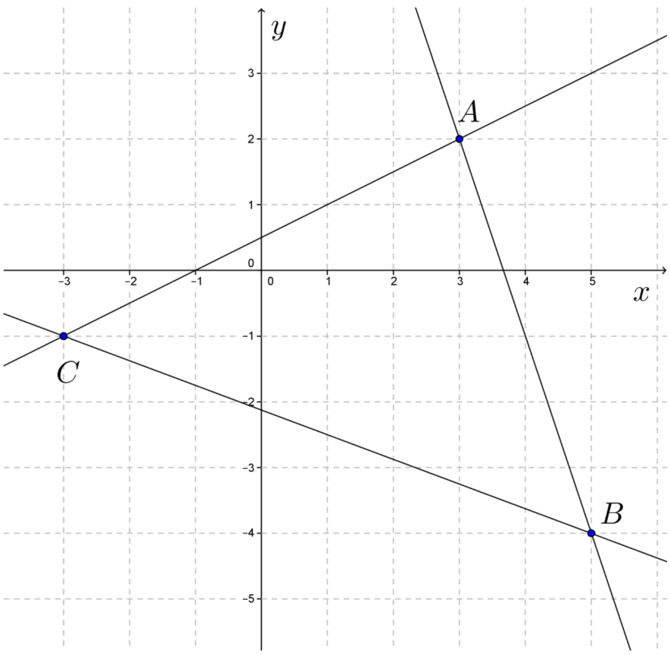
Wykaż, że $a + b = 0$.

Zadanie 14.

Uzasadnij, że dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich x różnych od $\frac{1}{3}$ wartość wyrażenia $\log_{3x}\left(3x^2\right) + \log_{3x}\left(9x\right)$ jest większa od 2.

Zadanie 15.

Na rysunku przedstawiono wykresy trzech parami przecinających się prostych.



Te proste to

A. $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 11 \\ 3x + 8y = -17 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = -11 \\ 3x + 8y = -17 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 11 \\ 3x + 8y = -17 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 11 \\ 3x + 8y = 17 \end{cases}$

Zadanie 16.

Dany jest trójkąt *ABC*, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = 7 - x$ oraz $y = 0$. Oblicz pole trójkąta *ABC*.

Zadanie 17.

Wyznacz takie liczby a i b, dla których układ równań $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ ax^2 + y + b = 0 \end{cases}$ jest sprzeczny, zaś układ równań $\begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ b^2 x + y + a = 0 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 18.

Rozwiązaniem układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest para różnych dodatnich liczb całkowitych. Jednym z równań tego układu jest $2x + y = 6$. Wyznacz drugie równanie układu, wiedząc, że jest to równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 19.

Wśród podanych poniżej nierówności wskaż tę, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-3,1)$.

A. $x(x+2) < 3$ B. $x(x+4) < 1$ C. $x(x+3) < 1$ D. $x(x+1) < 3$

Zadanie 20.

W tabelce podano wartości funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla wybranych trzech argumentów.

x	0	1	6
$f(x)$	$-2\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$

Rozwiąż nierówność $f(x) \geq 0$.

Zadanie 21.

Rozważmy prostokąt o polu mniejszym od 24, w którym jeden bok jest od drugiego dłuższy o 5. Oblicz długość dłuższego boku prostokąta, jeśli jest ona liczbą całkowitą parzystą.

Zadanie 22.

Równanie $\frac{3(2-x)}{4x-3}=\frac{3}{2}$ **nie ma** takiego samego rozwiązania, jak równanie

A. $6(2-x)=3(4x-3)$

B. $\frac{2}{3}(6-3x)=4x-3$

C. $9(2-x)=2(4x-3)$

D. $3(2-x)=\frac{3}{2}(4x-3)$

Zadanie 23.

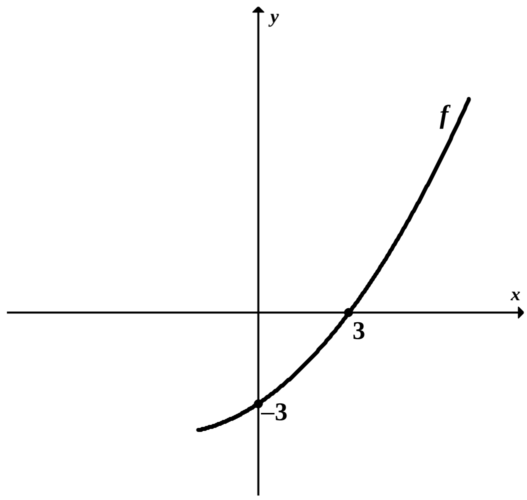
Do wyrażenia $\frac{1}{x+1}$ określonego dla $x\neq -1$ dodano jego odwrotność. Oblicz x, dla którego otrzymana suma jest równa 2.

Zadanie 24.

Do napełniania basenu służą dwie pompy. Pierwsza z nich ma wydajność o 20% większą niż druga. Napełnienie pustego basenu tylko drugą pompą trwa o 1 godzinę i 40 minut dłużej niż przy użyciu tylko pierwszej pompy. Oblicz, jaką część pustego basenu napełnią w ciągu jednej godziny obie pompy, pracując jednocześnie.

Zadanie 25.

Na rysunku obok jest przedstawiony fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x=-3$.



Rozwiązaniem nierówności $f(x)\leq 0$ jest zbiór

A. $\langle 0,-3\rangle$

B. $\langle -3, 3\rangle$

C. $\langle -6, 3\rangle$

D. $\langle -9,3\rangle$

Zadanie 26.

Funkcja W jest określona wzorem $W(x)=3x^4-bx-2a$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Równość $W(-1)+W(1)=0$ zachodzi, gdy

A. $a=\frac{2}{3}$ B. $a=\frac{3}{2}$ C. $a=1$ D. $a=-1$

Zadanie 27

Na tablicy zapisano następujące potęgi: $\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)}$, $(2)^{\left(2^{2^2}\right)}$, $\left(2^{2^2}\right)^2$, $(2)^{\left(2^2\right)^2}$.

Ile **różnych** liczb reprezentują te zapisy?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

1.2. Funkcje

Zadanie 28.

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\left(-\infty,-1\right\rangle$, a wartość -5 osiąga ona dla dwóch argumentów: 2 i 10.

Komentarz do zadania

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej, która spełnia warunki podane w zadaniu. Zbiór wartości tej funkcji to przedział $\left(-\infty,-1\right\rangle$, zatem ramiona paraboli skierowane są w dół. Wiesz, że wykres tej funkcji przechodzi przez punkty $(2,-5)$ i $(10,-5)$. Zauważ, że punkty te leżą symetrycznie względem pewnej prostej — osi symetrii paraboli. Wierzchołek paraboli leży na tej prostej. Dzięki temu możesz już podać pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli. Drugą odczytasz ze zbioru wartości funkcji f. Chociaż twoim zadaniem jest napisanie wzoru funkcji w postaci ogólnej, to jednak na początku bardziej pomocna będzie postać kanoniczna. Napisz tę postać, wstawiając odpowiednio wyznaczone wcześniej współrzędne wierzchołka paraboli. Do obliczenia pozostał jeszcze współczynnik a. Czy wiesz, jak go wyliczyć? Jeśli nie, to skorzystaj z faktu, że do paraboli należy np. punkt $(2,-5)$. Po wyliczeniu a pozostaje jeszcze doprowadzić wzór do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

Wykorzystujemy własność paraboli dotyczącą symetrii względem prostej $x=p$, gdzie $p=\frac{2+10}{2}=6$.

Zatem wierzchołek paraboli ma współrzędne $W=(6,-1)$.

Wzór funkcji możemy przedstawić w postaci $f(x)=a(x-6)^2-1$.

Wykorzystujemy fakt, że do wykresu funkcji należy punkt $(2,-5)$:

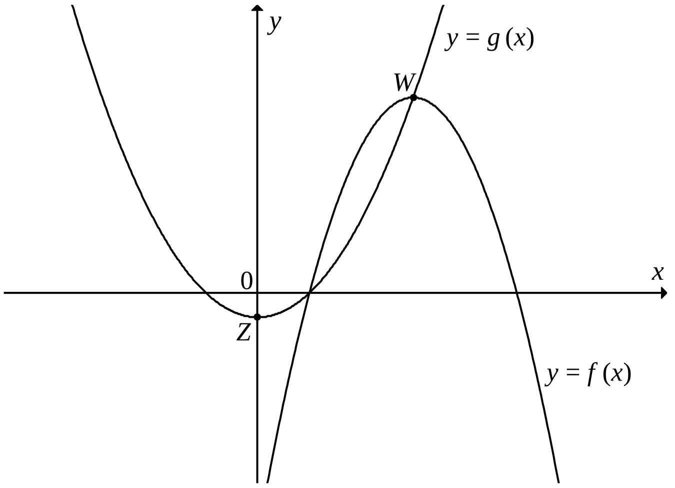
$$-5=a(2-6)^2-1,$$

$$a=-\frac{1}{4};$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x-6)^2-1=-\frac{1}{4}x^2+3x-10.$$

Zadanie 29.

Na rysunku są przedstawione fragmenty wykresów funkcji kwadratowych *f* i g. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, a mniejsze z jej miejsc zerowych jest jednocześnie miejscem zerowym funkcji g. Wierzchołek *W* paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, leży na



wykresie funkcji g, a wierzchołek *Z* paraboli będącej wykresem funkcji g leży na osi *Oy* układu współrzędnych.

Wyznacz wzór funkcji g.

Komentarz do zadania

Wykorzystaj podany wzór funkcji *f* i oblicz miejsca zerowe (możesz wykorzystać wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego). Otrzymasz w ten sposób jedno z miejsc zerowych funkcji g. Wyznacz współrzędne wierzchołka *W* paraboli będącej wykresem funkcji *f*. Wykorzystaj teraz informację, że punkt *W* leży na wykresie funkcji g.

Co wynika z faktu, że wierzchołek *Z* paraboli będącej wykresem funkcji g leży na osi *Oy* układu współrzędnych?

Zadanie 30.

Różnica największej i najmniejszej wartości, jakie funkcja kwadratowa

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

przyjmuje w przedziale $\langle -3, k\rangle$ dla $k > 0$ jest równa $4\frac{1}{2}$. Oblicz *k*.

Komentarz do zadania

Zauważ, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ są skierowane w dół. Największą wartością tej funkcji rozpatrywanej w zbiorze liczb rzeczywistych jest $q = f(p)$, gdzie (p, q) są współrzędnymi wierzchołka paraboli.

Oblicz pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli i sprawdź, czy należy do przedziału $\langle -3, k\rangle$ a następnie oblicz największą wartość, jaką przyjmuje ta funkcja.

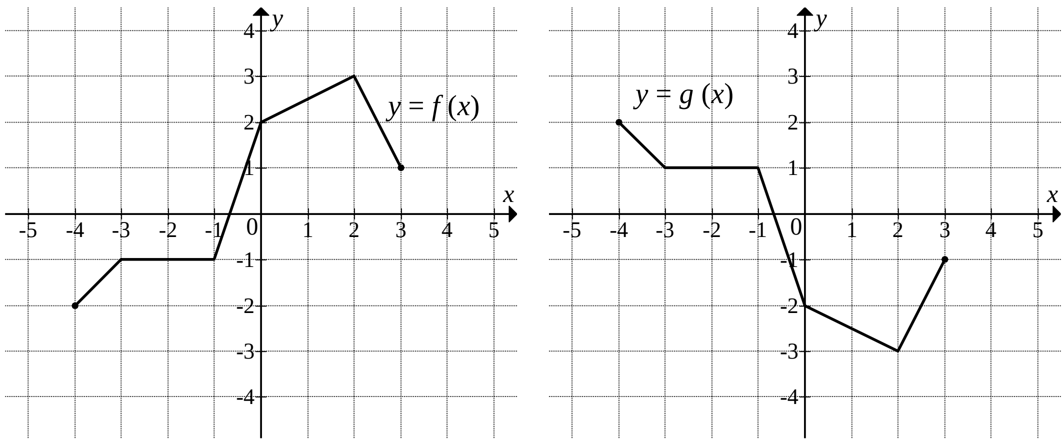
Najmniejszą wartość funkcji obliczysz, wykorzystując daną w zadaniu różnicę między największą i najmniejszą wartością tej funkcji w przedziale $\langle -3, k \rangle$.

Teraz oblicz argument, dla którego funkcja *f* przyjmuje wartość najmniejszą równą $3\frac{1}{2}$.

Ułóż i rozwiąż równanie oraz wybierz odpowiedź spełniającą warunki zadania.

Zadanie 31.

Na rysunku 1. jest przedstawiony wykres funkcji *f*, a na rysunku 2. — wykres funkcji *g*.



Rys. 1. Rys. 2.

Funkcja *g* jest określona wzorem

A. $g(x) = -f(x)$ B. $g(x) = f(-x)$ C. $g(x) = f(x) + 4$ D. $g(x) = f(x) - 4$

Zadanie 32.

Wyznacz wartość największą funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 1}$ w przedziale $\langle 1, 3 \rangle$.

Zadanie 33.

Funkcja *f*, której dziedziną jest zbiór $\langle -1, 5 \rangle$, jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 6x + 5$. Wyznacz zbiór wszystkich wartości funkcji *f*.

Zadanie 34.

Wykres funkcji kwadratowej *f* przecina oś Ox w punktach $x = 1$ oraz $x = 3$ i przechodzi przez punkt $(0, -3)$. Wykres ten przesunięto i otrzymano wykres funkcji kwadratowej $g(x) = f(x - p)$. Wierzchołek funkcji *g* leży na osi Oy. Wyznacz wzór funkcji *g*.

Zadanie 35.

Parabola, która jest wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$, przechodzi przez punkt $(-2,10)$ oraz $f(-1)=f(3)=0$. Oblicz odległość wierzchołka paraboli od początku układu współrzędnych.

Zadanie 36.

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+4x+1$. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, leży na prostej o równaniu $y=-5$. Oblicz współrzędne tego wierzchołka.

Zadanie 37.

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x)=-\frac{1}{3}x^2-2x+c$ jest przedział $(-\infty,7\rangle$. Zatem współczynnik c jest równy

A. -3 B. 4 C. 7 D. 10

Zadanie 38.

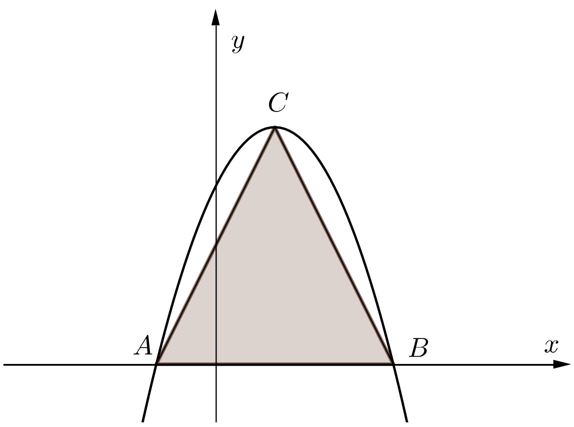
Największa wartość funkcji kwadratowej $f(x)=a(x-2)^2-4$, gdzie $a\neq 0$, w przedziale domkniętym $\langle -4,-2\rangle$ jest równa 12. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -4,-2\rangle$.

Zadanie 39.

Funkcja kwadratowa f, której miejscami zerowymi są liczby -2 i 4, dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3. Uzasadnij, że wykres funkcji f ma dwa punkty wspólne z prostą $y=2$.

Zadanie 40.

Wierzchołki trójkąta ABC leżą na paraboli, która jest wykresem pewnej funkcji kwadratowej f (zobacz rysunek).



Pole trójkąta jest równe 8, punkt $C=(1,4)$ jest wierzchołkiem paraboli, a punkty A i B leżą na osi Ox. Wyznacz wzór funkcji f.

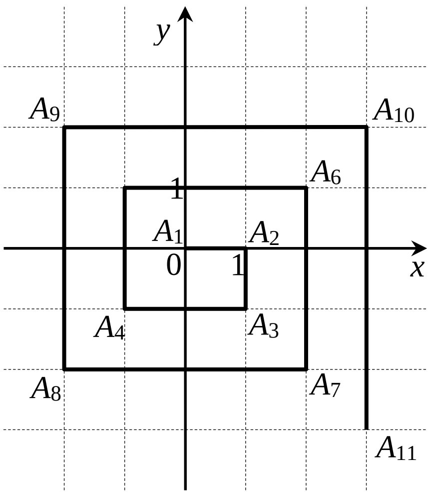
Zadanie 41.

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie rysujemy łamane. Kolejne wierzchołki każdej z tych łamanych to punkty:

$$A_1=(0,0),\quad A_2=(1,0),\quad A_3=(1,-1),$$

$$A_4=(-1,-1),\quad A_5=(-1,1),\quad A_6=(2,1)$$

i tak dalej. Na rysunku obok jest przedstawiona łamana składająca się z dziesięciu odcinków, której ostatnim wierzchołkiem jest punkt $A_{11}=(3,-3)$.



Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n \geq 1$ długość łamanej złożonej z $2n$ odcinków, czyli takiej, której początkowym wierzchołkiem jest punkt A_1, a końcowym A_{2n+1}. Wyznacz wzór funkcji f oraz oblicz jej wartość dla $n=33$.

Zadanie 42.

Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β, w którym $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Wtedy

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\mathrm{tg}\beta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Zadanie 43.

Dana jest liczba $a=\sin 72^\circ$. Zapisz liczbę $1+\mathrm{tg}^2 72^\circ$ w zależności od a.

Zadanie 44.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{3\cos\alpha-5\sin\alpha}$, jeśli wiadomo, że α jest kątem ostrym oraz $\mathrm{tg}\alpha=3$.

Zadanie 45.

Kąty α i β są kątami ostrymi w trójkącie prostokątnym i $\cos\alpha=\frac{2}{5}$. Oblicz $\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\beta$.

Zadanie 46.

Dla pewnego kąta ostrego α funkcje trygonometryczne sinus i cosinus mają wartości $\sin\alpha=a-\frac{1}{4}$, $\cos\alpha=a+\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$.

Zadanie 47.

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Wykaż, że średnia arytmetyczna liczb: $a = \sin\alpha$, $b = \frac{1}{2}$ oraz $c = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$ jest równa $\frac{\sqrt{5}+1}{6}$.

Zadanie 48.

Wykaż, że jeżeli α i β są kątami ostrymi takimi, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{35}$, to $\alpha = \beta$.

Zadanie 49.

Funkcja wymierna *f* jest dana wzorem $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-6}$. Wyznacz wszystkie wartości argumentu, dla których funkcja *f* przyjmuje wartość 2.

Zadanie 50.

Najmniejszą wartością, jaką funkcja kwadratowa *f* dana wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje w przedziale $\langle 0,4\rangle$, jest $f(2)$. Uzasadnij, że $a > 0$ i $b < 0$.

Zadanie 51.

Funkcja kwadratowa *f* przyjmuje w przedziale $\langle 0,3\rangle$ największą wartość dla argumentów 0 i 3. Uzasadnij, że w przedziale $\langle -2,5\rangle$ funkcja *f* przyjmuje największą wartość dla argumentów -2 i 5.

1.3. Ciągi

Zadanie 52.

Oblicz sumę wszystkich parzystych liczb całkowitych dodatnich nie większych od 1000 i niepodzielnych przez 3.

Komentarz do zadania

Możesz obliczyć sumę wszystkich liczb całkowitych parzystych nie większych od 1000 i odjąć od niej sumę liczb parzystych podzielnych przez 3.

Ile jest liczb całkowitych dodatnich parzystych nie większych od 1000? Jaki ciąg tworzą te liczby? Oblicz jego sumę.

Ile jest liczb całkowitych dodatnich parzystych **podzielnych** przez 3 (czyli podzielnych przez 6)? Zauważ, że największą liczbą parzystą podzielną przez 3 i nie większą od 1000 jest 996. Skoro liczb od 1 do 996 jest 996, z czego co szósta będzie podzielna przez 6, to takich liczb jest 996 : 6 = 166. Oblicz sumę 6 + 12 + 18 + … + 996.

Teraz możesz już obliczyć sumę wskazanych liczb.

Rozwiązanie

Liczb całkowitych dodatnich parzystych nie większych od 1000 jest 500. Obliczamy sumę wszystkich liczb naturalnych parzystych nie większych od 1000, korzystając ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\frac{2+1000}{2}\cdot 500 = 250500.$$

Liczby całkowite dodatnie parzyste podzielne przez 3 zapisujemy w postaci: $6x$, gdzie x jest liczbą całkowitą dodatnią. Największą liczbą parzystą podzielną przez 3 i nie większą od 1000 jest 996, zatem liczb całkowitych dodatnich podzielnych przez 6 jest 166 (liczb od 1 do 996 jest 996, z czego co szósta będzie podzielna przez 6, stąd 996 : 6 = 166).

Obliczamy sumę wszystkich liczb naturalnych parzystych podzielnych przez 6, korzystając ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\frac{6+996}{2}\cdot 166 = 83166.$$

Obliczamy sumę wszystkich parzystych liczb całkowitych dodatnich nie większych od 1000 i niepodzielnych przez 3:

$$250500 - 83166 = 167334.$$

Odpowiedź: Suma wszystkich parzystych liczb całkowitych dodatnich nie większych od 1000 i niepodzielnych przez 3 jest równa 167334.

Zadanie 53.

W pewnym ciągu geometrycznym (a_n) wyraz a_4 jest osiem razy większy od wyrazu a_1. Drugi wyraz tego ciągu jest równy 6. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną *k* taką, że $a_k > 100$.

Komentarz do zadania

Każdy z wyrazów ciągu geometrycznego można przedstawić za pomocą pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu. Zapisując w ten sposób wyraz a_4 oraz podaną w zadaniu zależność między nim a pierwszym wyrazem, możesz obliczyć nieznany iloraz ciągu (czy w danym ciągu pierwszy wyraz lub iloraz może być równy 0?). Znając iloraz i drugi wyraz ciągu, możesz obliczyć pierwszy wyraz i zapisać wzór ogólny ciągu, a potem zbadać (choćby sprawdzając kolejne wyrazy), kiedy wyraz ciągu jest większy od 100.

Zadanie 54.

Trójwyrazowy ciąg $(x+1, x-1, 2x)$ jest arytmetyczny dla

A. $x = -3$ B. $x = -1$ C. $x = 0$ D. $x = 2$

Zadanie 55.

W ciągu arytmetycznym (a_n) dla $n \geq 1$, $a_1 = 8$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 = 33$. Wtedy suma $a_4 + a_5 + a_6$ jest równa

A. 44 B. 60 C. 69 D. 93

Zadanie 56.

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dana jest wzorem $S_n = \frac{n^2 - 25n}{4}$, gdzie $n \geq 1$. Różnica ciągu arytmetycznego (b_n) jest równa $\frac{3}{2}$ oraz jego piąty wyraz jest równy 8. Wyznacz sumę 17 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (c_n), wiedząc, że $c_n = 2b_n - a_8$, gdzie $n \geq 1$.

Zadanie 57.

Suma 23 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dla $n \geq 1$ jest równa 1564. Oblicz średnią arytmetyczną wyrazów a_3 i a_{21}.

Zadanie 58.

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (b_n), określony dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $b_n = 2a_{n+2} + 4a_{n+4}$ jest arytmetyczny.

Zadanie 59.

Skończony ciąg arytmetyczny ma nieparzystą liczbę wyrazów. Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że środkowy wyraz jest dzielnikiem sumy tych wyrazów.

Zadanie 60.

W ciągu geometrycznym rosnącym pierwszy wyraz jest równy (-16), a siódmy wyraz jest równy $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Kwadrat czwartego wyrazu jest równy

A. -2 B. 4 C. $\left(\frac{61}{8}\right)^2$ D. $\left(\frac{65}{8}\right)^2$

Zadanie 61.

W ciągu geometrycznym (a_n), w którym $a_1 = 1$, znane są wartości dwóch wyrazów: $a_k = 16$ i $a_{k+2} = 32$, gdzie *k* jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznacz wyraz a_{10}.

Zadanie 62.

Kacper przez 5 dni zapisywał swoje wydatki. Zauważył, że każdego dnia wydatki były niższe o 20% w stosunku do wydatków poprzedniego dnia. Oblicz kwotę, jaką Kacper wydał w tym czasie, jeśli piątego dnia wydał 20,48 zł.

Zadanie 63.

W ciągu geometrycznym (a_n) o różnych i niezerowych wyrazach różnica między wyrazami piątym i trzecim jest trzy razy większa niż różnica między wyrazami czwartym i trzecim. Oblicz iloraz ciągu (a_n).

Zadanie 64.

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach różnych od zera, określony dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (b_n), określony dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $b_n = a_n \cdot (2a_{n+2})^2$, jest geometryczny.

Zadanie 65.

Dana jest funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ oraz ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = f(3n)$, dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny i oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 66.

Skończony ciąg $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ jest geometryczny. Uzasadnij, że mając dany tylko wyraz środkowy a_3, można obliczyć iloczyn wszystkich wyrazów tego ciągu.

1.4. Geometria

Zadanie 67.

Trójkąt ostrokątny *ABC* jest wpisany w okrąg o środku *O* i promieniu 4. Kąt *CAB* jest równy kątowi *OCB* oraz kąt *CBA* jest równy kątowi *OCA*. Oblicz długość wysokości *CD* opuszczonej z wierzchołka *C* na bok *AB*.

Komentarz do zadania

Korzystając z zależności między kątami wpisanym i środkowym opartymi na tym samym łuku, ustal związek między kątami *CAB* i *BOC*. Dzięki temu wszystkie kąty trójkąta *BOC* uzależnisz tylko od kąta *CAB*, co pozwoli go wyznaczyć. Podobnie możesz wyznaczyć miarę kąta *CBA*, korzystając z zależności między kątami *CBA* i *AOC*. W ten sposób otrzymasz istotną informację na temat typu trójkąta *ABC*, która pozwoli na podanie długości wysokości *CD* (w jakim trójkącie promień okręgu opisanego jest równy jednej z wysokości?).

Rozwiązanie

Oznaczmy kąty: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku otrzymujemy, że

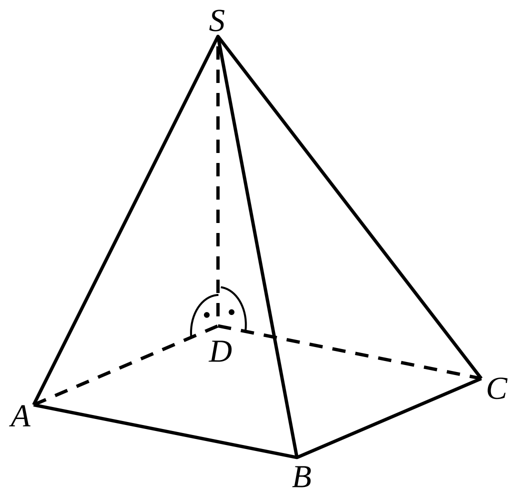
$\angle COB = 2\alpha$. Ponieważ $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$, otrzymujemy $\alpha = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2}$, czyli $\alpha = 45^\circ$.

Analogicznie dowodzimy, że $\beta = 45^\circ$.

Wobec tego trójkąt *ABC* jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, co oznacza, że wysokość *CD* ma długość równą promieniowi, czyli $|CD| = 4$.

Zadanie 68.

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest romb o boku długości 3. Krawędź boczna *DS* ma długość 4 i jest jednocześnie wysokością tego ostrosłupa. Długości pozostałych trzech krawędzi bocznych są równe (zobacz rysunek).



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

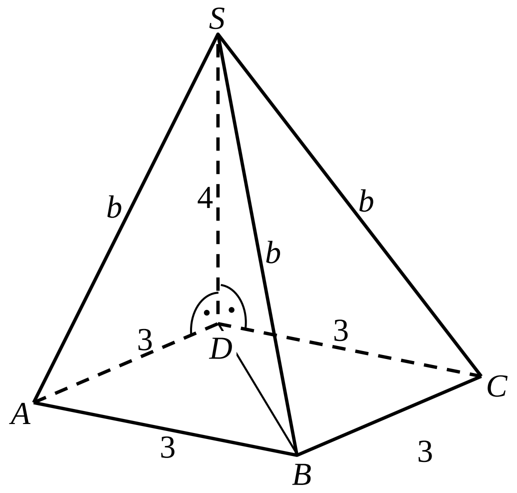
Komentarz do zadania

Zwróć uwagę, że wszystkie trzy trójkąty *ADS*, *BDS* i *CDS* są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną *DS*, a krawędzie boczne *AS*, *BS* i *CS* są przeciwprostokątnymi tych trójkątów. Jakie więc to są trójkąty? Wykorzystaj twierdzenie Pitagorasa i oblicz długości wszystkich boków każdego z tych trójkątów. Zwróć uwagę na przyprostokątną *BD* trójkąta *BDS*, która jest jednocześnie przekątną podstawy ostrosłupa. Jak ma się długość tej przekątnej do długości boku podstawy ostrosłupa?

Rozwiązanie

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość tego ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} P_{ABCD} \cdot 4 = \frac{4}{3} P_{ABCD}.$$

Zadanie sprowadza się więc do obliczenia pola rombu *ABCD*.

Ponieważ krawędź *DS* jest wysokością ostrosłupa, to trójkąty *ADS*, *BDS* i *CDS* są prostokątne, a *DS* jest wspólną przyprostokątną każdego z nich. Ponieważ krawędzie boczne *AS*, *BS* i *CS* mają tę samą długość, to trójkąty *ADS*, *BDS* i *CDS* mają równe przeciwprostokątne. Zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że równe są też przyprostokątne *AD*, *BD* i *CD*. To oznacza, że przekątna *BD* rombu *ABCD* ma taką samą długość jak bok tego rombu, więc trójkąty *ABD* i *BCD* są równoboczne. Pole rombu jest więc równe

$$P_{ABCD} = 2 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

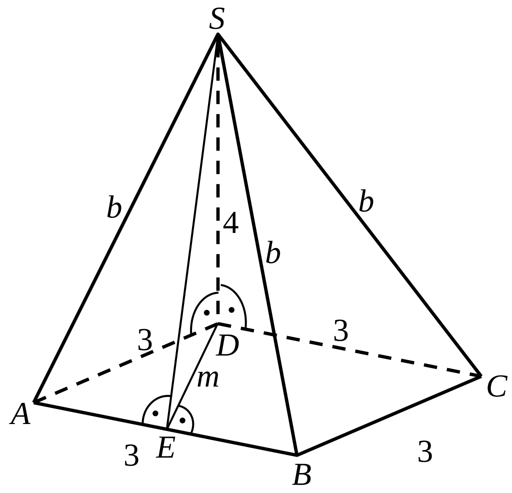
Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{4}{3} P_{ABCD} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $6\sqrt{3}$.

II sposób

Poprowadźmy wysokość *SE* ściany bocznej *ABS* i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADS* otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AD|^2 + |DS|^2,$$

$$b^2 = 3^2 + 4^2,$$

$$b^2 = 25,$$

$$b = 5.$$

Ponieważ trójkąt *ABS* jest równoramienny, gdyż $|AS| = |BS|$, to spodek *E* tej wysokości jest środkiem podstawy *AB* tego trójkąta. Zatem $|AE| = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AES* otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AE|^2 + |ES|^2,$$

$$5^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2,$$

$$h^2 = \frac{91}{4}.$$

Trójkąt *EDS* jest prostokątny, gdyż krawędź *DS* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta otrzymujemy

$$|ES|^2 = |ED|^2 + |DS|^2,$$

$$h^2 = m^2 + 4^2,$$

$$m^2 = \frac{91}{4} - 16,$$

$$m^2 = \frac{27}{4},$$

$$m = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważmy, że odcinek *DE* jest wysokością rombu *ABCD* opuszczoną z wierzchołka *D* na bok *AB*, gdyż

$$|AE|^2 + |ED|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9 = |AD|^2.$$

Zatem pole rombu *ABCD* jest równe

$$P_{ABCD} = 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

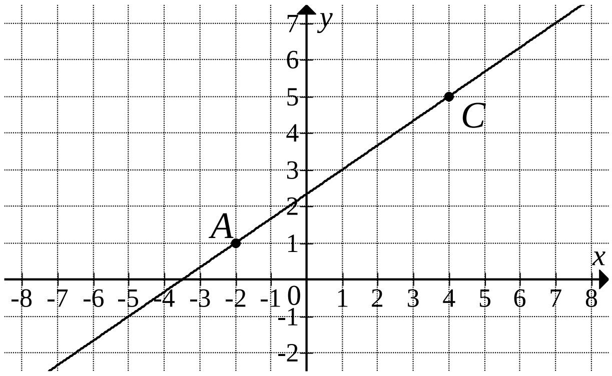
Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{4}{3} P_{ABCD} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $6\sqrt{3}$.

Zadanie 69.

Na rysunku jest przedstawiona prosta zawierająca przekątną *AC* rombu *ABCD* oraz wierzchołki $A=(-2,1)$ i $C=(4,5)$ tego rombu.



Wskaż równanie prostej zawierającej przekątną *BD* tego rombu.

A. $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$ B. $y=-\frac{3}{2}x+4$ C. $y=-x+4$ D. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$

Komentarz do zadania

Z pewnością wiesz, że przekątne rombu są prostopadłe. Aby wyznaczyć równanie prostej zawierającej przekątną *BD*, możesz najpierw obliczyć współczynnik kierunkowy prostej zawierającej przekątną *AC*. Jak to zrobić?

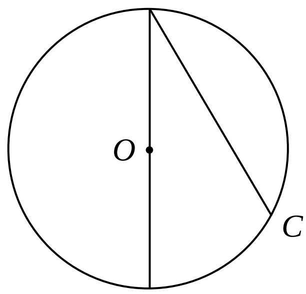
Jaki jest współczynnik kierunkowy prostej *BD*? Przyjrzyj się teraz odpowiedziom do zadania. Na pewno zauważysz, że poprawna może być tylko odpowiedź B albo D.

Przekątne rombu dzielą się wzajemnie na połowy, więc prosta *BD* przechodzi przez środek odcinka *AC*. Jak obliczyć współrzędne środka odcinka *AC*?

Czy znając współczynnik kierunkowy prostej oraz współrzędne punktu, przez który ona przechodzi, potrafisz wyznaczyć równanie prostej?

Zadanie 70.

Odcinek *AB* jest średnicą okręgu o środku w punkcie *O* i promieniu *r* (zobacz rysunek).



Cięciwa *AC* ma długość $r\sqrt{3}$, więc

A. $|\sphericalangle AOC|=130^\circ$.

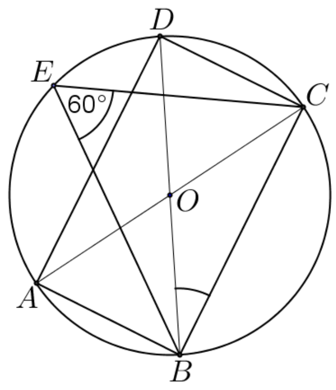
B. $|\sphericalangle ABC|=90^\circ$.

C. $|\sphericalangle BOC|=60^\circ$.

D. $|\sphericalangle BAC|=45^\circ$.

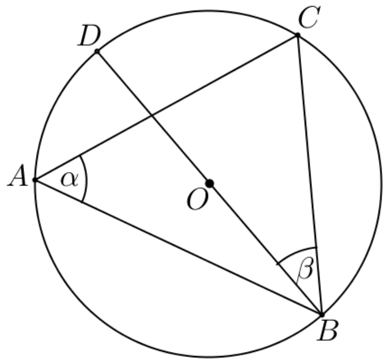
Zadanie 71.

Punkty *A, B, C, D, E* są położone w tej kolejności na okręgu o środku *O* (zobacz rysunek). Odcinki *BD* i *AC* są średnicami tego okręgu oraz $|\sphericalangle BEC|=60^\circ$. Oblicz miarę kąta *CBD*.



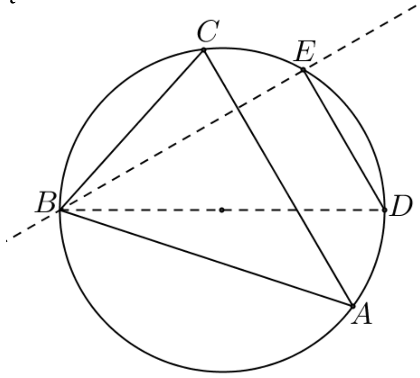
Zadanie 72.

Punkty *A, B, C, D* są położone w tej kolejności na okręgu o środku *O* (zobacz rysunek). Odcinek DB jest średnicą tego okręgu i $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBD| = \beta$. Wykaż, że $\alpha + \beta = 90^\circ$.



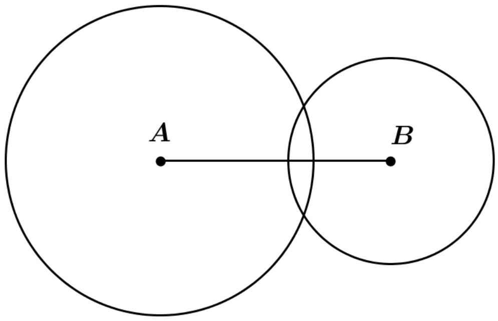
Zadanie 73.

Parami różne punkty *A, B, C, D, E* leżą na okręgu. Odcinki DE i AC są równoległe, zaś odcinek BD jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek). Wykaż, że prosta BE zawiera wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok AC.



Zadanie 74.

Końce odcinka *AB* o długości 9 są środkami okręgów o promieniach 6 i 4 (zobacz rysunek).

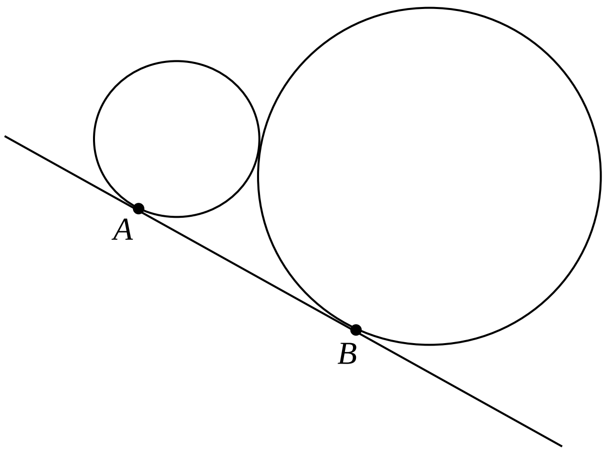


Punkt C leży na odcinku AB i jest środkiem takiego okręgu, o promieniu większym od 6, że dwa dane okręgi są do niego wewnętrznie styczne. Promień okręgu o środku C ma długość

A. 6,5 B. 7,5 C. 8,5 D. 9,5

Zadanie 75.

Dwa okręgi o promieniach r i R są styczne zewnętrznie i są styczne do wspólnej prostej w punktach A i B (zobacz rysunek). Oblicz wartość iloczynu rR, jeżeli wiadomo, że odcinek AB ma długość 5.

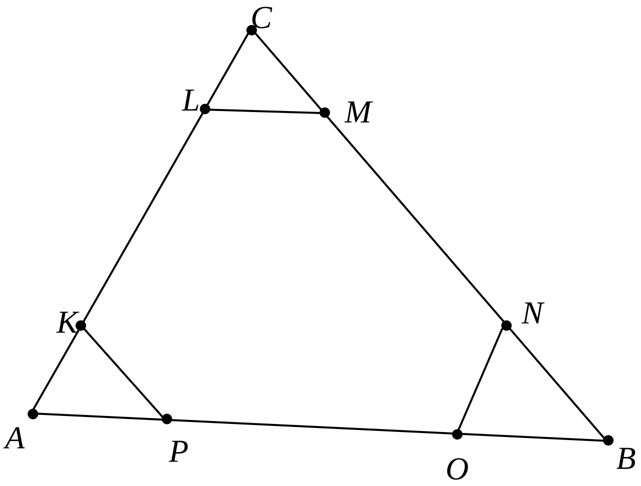


Zadanie 76.

Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie: okrąg O_1 o środku S i promieniu równym 6 oraz okrąg O_2 o środku T i promieniu długości 2. Z punktu S poprowadzono półproste styczne do okręgu O_2 w punktach K i L. Oblicz pole czworokąta $SKTL$.

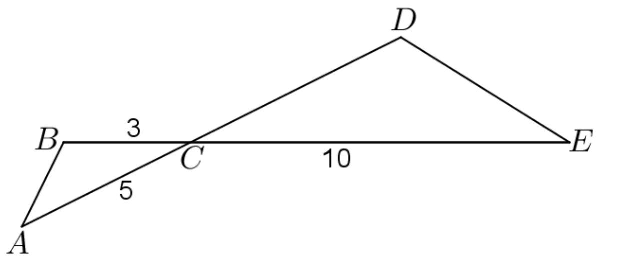
Zadanie 77.

Pole trójkąta *ABC* równe jest *S*. Każdy bok trójkąta podzielono w stosunku $x : y : x$, gdzie x i y są pewnymi liczbami dodatnimi. Wyznacz pole sześciokąta, którego wierzchołkami są punkty podziałów boków trójkąta (zobacz rysunek).



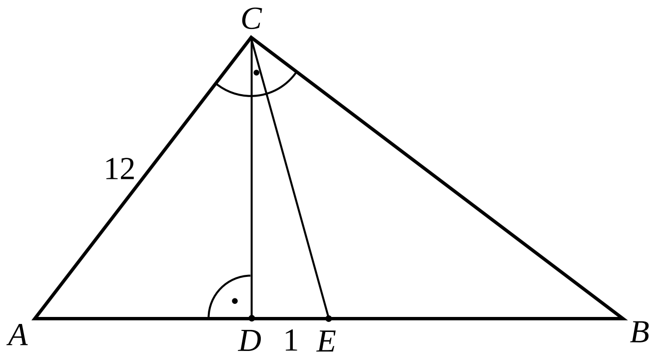
Zadanie 78.

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie C. W trójkątach ABC i CDE zachodzą związki: $|\angle CAB| = |\angle CED|$, $|AC| = 5$, $|BC| = 3$, $|CE| = 10$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty ABC i CDE są podobne. Oblicz długość boku CD.



Zadanie 79.

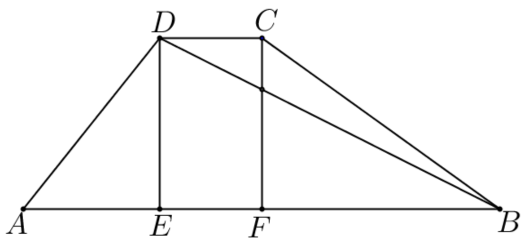
Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym przyprostokątna *AC* ma długość 12. Punkt *E* jest środkiem przeciwprostokątnej *AB*, spodek *D* wysokości *CD* leży między punktami *A* i *E*, a odległość między punktami *D* i *E* jest równa 1 (zobacz rysunek).



Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 80.

Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$ oraz zaznaczono wysokości DE i CF tego trapezu. Punkt F jest środkiem podstawy AB, a punkt E dzieli tę podstawę w stosunku $2:5$. Wykaż, że punkt przecięcia wysokości CF z przekątną DB dzieli tę przekątną w stosunku $3:7$, licząc od wierzchołka D.

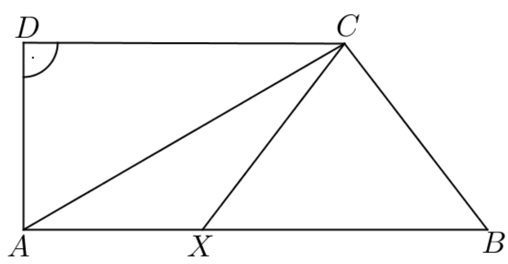


Zadanie 81.

W trójkącie ABC o bokach długości $|AC| = b$, $|BC| = a$ i kącie między nimi 60° poprowadzono dwusieczną kąta ACB, która przecięła bok AB w punkcie D. Zapisz długość odcinka CD w zależności od a i b.

Zadanie 82.

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ taki, że kąty przy wierzchołkach A i D są proste oraz $|AB| = 10$, $|DC| = 6$, a przekątna AC jest dwa razy dłuższa od ramienia DA. Na podstawie AB obrano taki punkt X, że $|CX| = |CB|$ (zobacz rysunek). Oblicz sinus kąta XCB.



Zadanie 83.

Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na kwadracie, którego jeden z boków jest zawarty w prostej o równaniu $y=2x-2$, a punkt $A=(1,5)$ jest jego wierzchołkiem. Rozważ wszystkie przypadki.

Zadanie 84.

Dwa boki trójkąta prostokątnego *ABC* są zawarte w prostych o równaniach $y = 2x - 3$ oraz $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$. Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkt $K = (4, -2)$ i zawiera trzeci bok trójkąta *ABC*. Rozważ wszystkie możliwości.

Zadanie 85.

Różnica współczynników kierunkowych dwóch prostych jest równa różnicy odwrotności tych współczynników. Uzasadnij, że te proste są prostopadłe albo równoległe.

Zadanie 86.

Punkty A i B, których pierwsze współrzędne są równe odpowiednio -2 i 2, należą do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{8}{x} + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, wiedząc, że punkt B jest środkiem odcinka AC.

Zadanie 87.

Prosta *l* przecina okrąg o środku *S* w punktach $A = \left(1 - \sqrt{2}, -\frac{1}{8}\right)$ i $B = \left(1 + \sqrt{2}, -\frac{3}{8}\right)$. Punkt *S* leży na prostej *l*. Sprawdź, czy punkt *S* leży na prostej *k* o równaniu $x - 4y = 0$.

Zadanie 88.

Dany jest sześciokąt foremny *ABCDEF*, którego środkiem symetrii jest punkt $O = \left(3, -\sqrt{3}\right)$, a wierzchołek *A* ma współrzędne $A = \left(1, -3\sqrt{3}\right)$. Wiadomo, że punkt $P = \left(4, -2\sqrt{3}\right)$ jest środkiem odcinka BO. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego sześciokąta.

Zadanie 89.

Punkt $M = (2,1)$ jest środkiem boku AB, a punkt $N = (8,3)$ to środek boku BC kwadratu $ABCD$. Oblicz długość boku kwadratu $ABCD$.

Zadanie 90.

Trójkąt o wierzchołkach $A = (-6, 0)$, $B = (6, 4)$ i $C = (-3, -8)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz sumę kątów wewnętrznych wielokąta, który jest częścią wspólną trójkąta *ABC* i jego obrazu, tj. trójkąta $A_1B_1C_1$.

Zadanie 91.

Prosta $y = 0$ jest osią symetrii figury złożonej z dwóch prostych o równaniach $y = (p+2)x - q$ i $y = (q-5)x + 2p$. Wyznacz *p* i *q*. Narysuj te proste w układzie współrzędnych.

Zadanie 92.

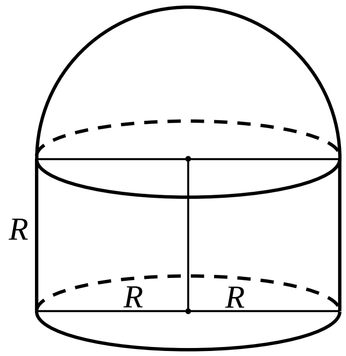
Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, niebędący równoległobokiem, w którym $AB \parallel CD$ oraz $A=(-9,7)$, $B=(3,1)$, $D=(-3,10)$. Trapez $A_1B_1C_1D_1$ jest obrazem trapezu $ABCD$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków trapezu $A_1B_1C_1D_1$ oraz równanie osi symetrii tego trapezu.

Zadanie 93.

Punkt P leży wewnątrz trójkąta o wierzchołkach $A=(6,0)$, $B=(0,4)$ i $C=(0,0)$. Oznaczmy przez P_{AC} obraz punktu P w symetrii osiowej względem prostej AC, a przez P_{BC} obraz punktu P w symetrii osiowej względem prostej BC. Uzasadnij, że punkty P_{AC}, C i P_{BC} leżą na jednej prostej.

Zadanie 94.

Przedstawiona na rysunku bryła składa się z walca i półkuli. Wysokość walca jest taka, jak promień jego podstawy i jest równa R.

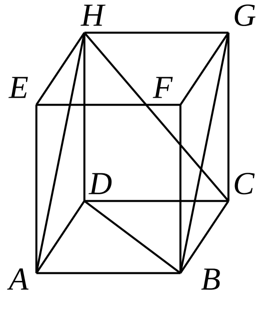


Objętość tej bryły jest równa

A. πR^3 B. $\frac{5}{3}\pi R^3$ C. $\frac{2}{3}\pi R^3$ D. $2\pi R^3$

Zadanie 95.

Podstawą graniastosłupa prostego czworokątnego $ABCDEFGH$ jest kwadrat $ABCD$ (zobacz rysunek).

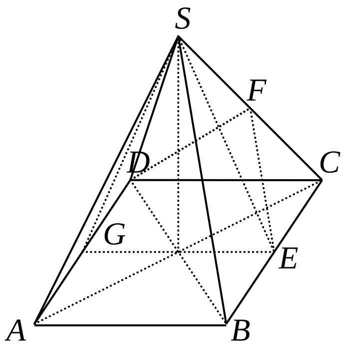


Kąt *AHC* między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych ma 50º. Kąt *DBG* między przekątną podstawy a przekątną ściany bocznej jest równy

A. 60º B. 65º C. 75º D. 80º

Zadanie 96.

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS*, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Punkty *G, E* i *F* są odpowiednio środkami odcinków *AD, BC* i *CS* (zobacz rysunek).

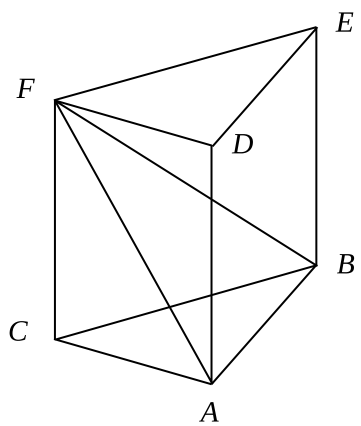


Kątem między przeciwległymi ścianami bocznymi jest kąt

A. *DFE* B. *GES* C. *ESG* D. *ASC*

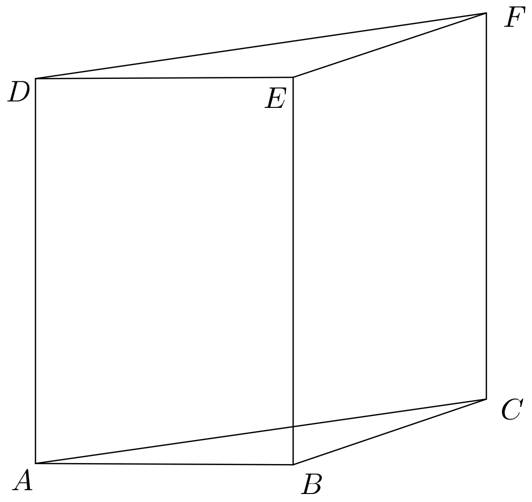
Zadanie 97.

Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCDEF* (zobacz rysunek) jest równa 8, a tangens kąta między wysokością trójkąta *ABF* poprowadzoną z wierzchołka *F* i płaszczyzną podstawy *ABC* tego graniastosłupa jest równy $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Oblicz pole trójkąta *ABF*.



Zadanie 98.

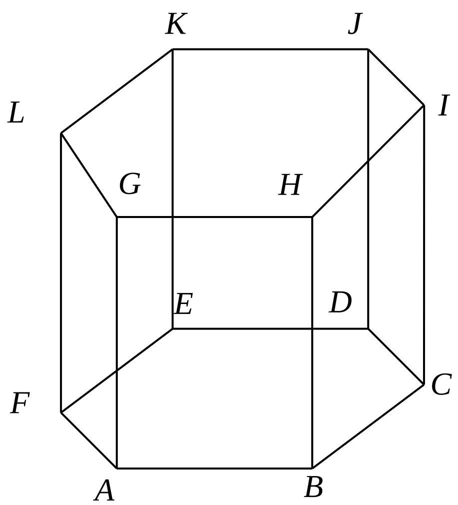
Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 4, jest równa $16\sqrt{6}$ (zobacz rysunek).



Oblicz miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

Zadanie 99.

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krótsza przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β takim, że $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Oblicz miarę kąta α, jaki tworzy dłuższa przekątna tej bryły z płaszczyzną podstawy.



Zadanie 100.

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości $6\sqrt{3}$ oraz krawędzi bocznej długości 12. Wyznacz miarę kąta między ścianami bocznymi tego ostrosłupa. Wynik podaj z dokładnością do $2°$.

Zadanie 101.

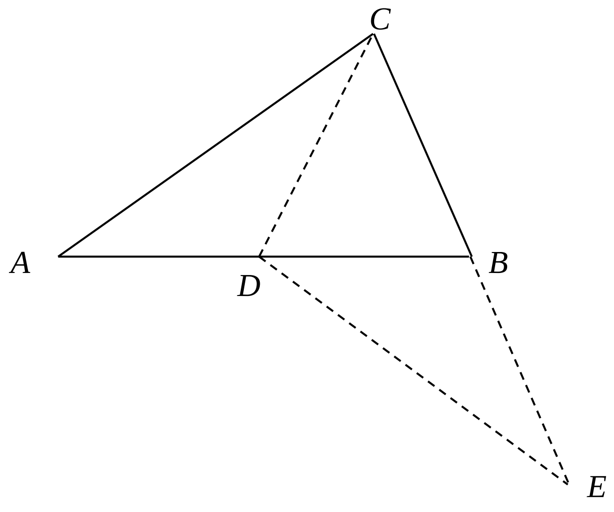
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt pomiędzy wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej jest równy 30°. Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $2\sqrt{2}$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 102.

W stożku stosunek pola powierzchni bocznej do pola podstawy jest równy $\frac{3}{2}$. Oblicz sinus kąta między tworzącą a płaszczyzną podstawy tego stożka.

Zadanie 103.

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB oraz $|CD| = |CB|$ (zobacz rysunek). Bok CB przedłużono tak, że $|CB| = |BE|$. Wykaż, że $|AC| = |DE|$.

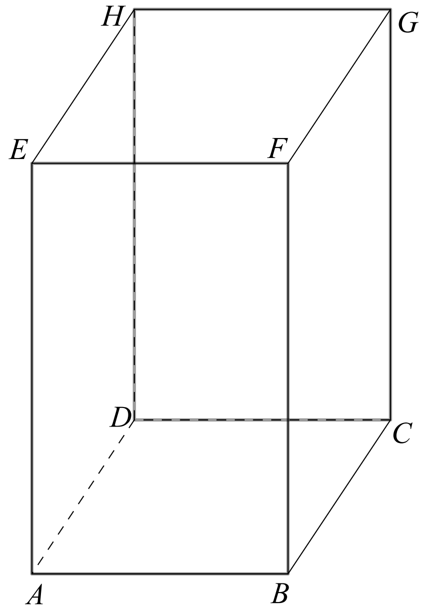


Zadanie 104.

Tworząca stożka o kącie rozwarcia α ma długość 8. Pole powierzchni całkowitej tego stożka jest równe 48π. Oblicz objętość stożka oraz miarę kąta α.

Zadanie 105.

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ o krawędzi podstawy długości $4\sqrt{2}$ oraz krawędzi bocznej równej 8. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi AD i DC oraz przez wierzchołek H (zobacz rysunek). Oblicz pole otrzymanego przekroju.



Zadanie 106.

W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przekątna AC_1 tworzy z płaszczyzną $ABCD$ kąt α. Punkty L i J są odpowiednio środkami krawędzi DD_1 i BB_1 oraz $|\sphericalangle LAJ| = 2\beta$. Uzasadnij, że $\cos\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Zadanie 107.

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest 2 razy dłuższa od wysokości ostrosłupa poprowadzonej na tę podstawę. Wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy.

Zadanie 108.

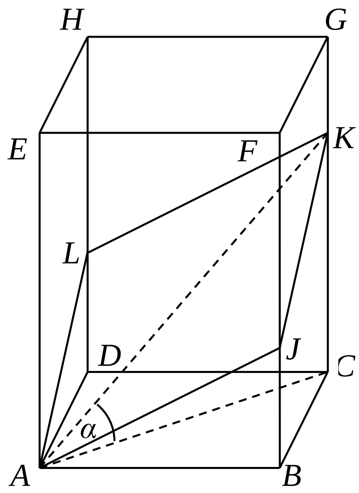
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość ma długość *H* oraz kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy $60°$. Wyznacz wzór na pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa w zależności od wysokości *H*.

Zadanie 109.

W stożku różnica długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 6. Cosinus kąta α między tworzącą a płaszczyzną podstawy tego stożka jest równy $\frac{2}{5}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

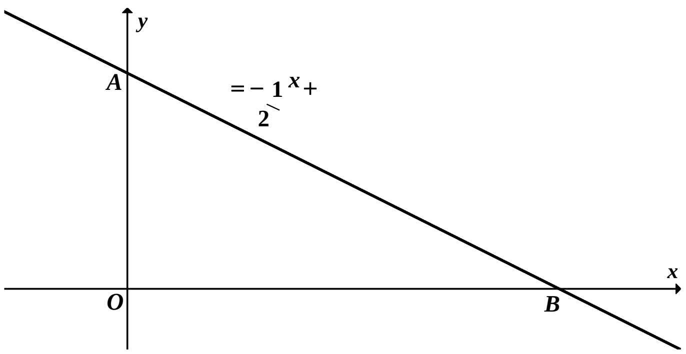
Zadanie 110.

Graniastosłup prawidłowy czworokątny *ABCDEFGH* o krawędzi podstawy długości 5 oraz krawędzi bocznej długości $5\sqrt{6}$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek *A* oraz punkty *L* oraz *J* leżące na przeciwległych krawędziach bocznych w równych odległościach od dolnej podstawy. Otrzymany przekrój jest czworokątem *AJKL*, którego przekątna *AK* tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α (zobacz rysunek). Zapisz pole tego przekroju w zależności od kąta α. Jakie wartości przyjmuje α?



Zadanie 111.

Dana jest prosta o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + b$, gdzie $b > 0$ przecina oś *Oy* w punkcie *A*, zaś oś *Ox* w punkcie *B* (zobacz rysunek). Pole trójkąta *AOB* wyznaczonego przez tę prostą i osie układu współrzędnych jest równe 16. Oblicz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie *AOB*.



Zadanie 112.

Punkty $A = (7,6)$ i $B = (1,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego *ABC*. Promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy

A. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{10\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 113.

Trójkąt T jest podobny do trójkąta T_1 w skali $k = \frac{1}{6}$, a trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T w skali $k = 3$. Pole trójkąta T_2 jest równe 24. Trójkąt T_1 ma pole równe

A. 12 B. 48 C. 72 D. 96

Zadanie 114.

Punkt $A=(2,7)$ jest wierzchołkiem kwadratu *ABCD*, a punkt $S=(6,5)$ jest środkiem okręgu opisanego na tym kwadracie. Bok tego kwadratu ma długość

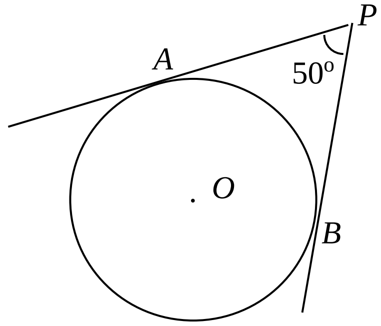
A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{20}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{20}$

Zadanie 115.

W trójkącie prostokątnym *ABC* kąt przy wierzchołku *A* jest prosty oraz $\sin(\sphericalangle ABC)=\frac{1}{3}$. Oblicz $\operatorname{tg}(\sphericalangle ABC)$.

Zadanie 116.

Do okręgu o środku *O* poprowadzono z zewnętrznego punktu *P* dwie styczne przecinające się w *P* pod kątem 50° (zobacz rysunek). Punktami styczności są, odpowiednio, punkty *A* i *B*.



Kąt *AOB* ma miarę

A. 90° B. 120° C. 130° D. 150°

Zadanie 117.

Na płaszczyźnie dane są trzy punkty: $A=(-1,1)$, $B=(5,-3)$ oraz $C=(3,2)$. Wyznacz równanie środkowej poprowadzonej do boku *AB* w trójkącie *ABC*.

Zadanie 118.

Wykres funkcji kwadratowej *f* danej wzorem $f(x)=2x^2-5x+3$ przecięto prostymi o równaniach $x=-1$ oraz $x=2$. Oblicz odległość między punktami przecięcia tych prostych z wykresem funkcji *f*.

Zadanie 119.

Niech prosta *k* będzie dana równaniem $y=2x+1$. Uzasadnij, że jej obrazem w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta do niej równoległa.

1.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 120.

W pojemniku jest 10 kul, w tym *b* kul białych i $10-b$ kul czarnych, gdzie $b\neq 5$. Z tego pojemnika losujemy dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem. Wykaż, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy dwie kule tego samego koloru, jest większe od $\frac{1}{2}$.

Komentarz do zadania

Losujemy dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem, czyli losujemy pierwszą kulę z 10 i drugą też z 10. Ile będzie wszystkich możliwych par kul w takim losowaniu? Zastosuj regułę mnożenia. Obliczysz w ten sposób moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω.

Niech zdarzenie A polega na tym, że otrzymamy kule tego samego koloru. Na ile sposobów można wylosować dwie kule białe, jeśli w pojemniku jest b kul białych? (losujemy najpierw jedną z b kul, potem drugą również z b kul). Na ile sposobów można wylosować dwie kule czarne, jeśli w pojemniku jest $(10-b)$ kul czarnych? Ile razem będzie par kul tego samego koloru? W ten sposób wyznaczysz moc zdarzenia A.

Korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Twoim zadaniem jest wykazanie, że prawdopodobieństwo zdarzenia A jest większe od $\frac{1}{2}$. Zapisz odpowiednią nierówność i przekształć ją do postaci, w której po jednej stronie będzie liczba 0. Przyjrzyj się drugiej stronie tej nierówności; czy dostrzegasz wzór skróconego mnożenia? Zastosuj go i wykaż, że nierówność jest prawdziwa.

Rozwiązanie

Ω jest zbiorem wszystkich par (x, y) o wartościach w zbiorze 10-elementowym. Jest to model klasyczny. $|\Omega| = (10)^2 = 100$.

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na otrzymaniu kul tego samego koloru.

Mamy dwa rozłączne przypadki:

— otrzymamy dwa razy kulę białą,

— otrzymamy dwa razy kulę czarną.

Stąd

$$|A| = b^2 + (10-b)^2 = 2b^2 - 20b + 100$$

oraz

$$P(A) = \frac{2b^2 - 20b + 100}{100} = \frac{b^2 - 10b + 50}{50}.$$

Mamy wykazać, że $\frac{b^2 - 10b + 50}{50} > \frac{1}{2}$.

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$\frac{b^2 - 10b + 50}{50} > \frac{1}{2},$$

$$2b^2 - 20b + 100 > 50,$$

$$2b^2 - 20b + 50 > 0,$$

$$b^2 - 10b + 25 > 0,$$

$$(b-5)^2 > 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo z założenia $b \neq 5$.

Uwaga: Można też obliczyć $P(A')=\frac{2b(10-b)}{100}$ i wykazać, że $P(A')\leq\frac{1}{2}$.

Zadanie 121.

Wykonano pomiary wysokości czterech krzeseł i każde dwa rezultaty były różne. Adam zapisał wyniki w metrach i odchylenie standardowe jego danych było równe σ_A. Bogdan zapisał te wyniki w centymetrach i odchylenie standardowe jego danych było równe σ_B. Wynika stąd, że

A. $\sigma_A=10\sigma_B$ B. $\sigma_A=100\sigma_B$ C. $10\sigma_A=\sigma_B$ D. $100\sigma_A=\sigma_B$

Komentarz do zadania

Wzór, za pomocą którego możesz obliczyć odchylenie standardowe danych, możesz znaleźć w zestawie „Wybrane wzory matematyczne".

Zauważ, że jeżeli przez x_1,x_2,x_3,x_4 oznaczymy kolejne wyniki zapisane przez Adama w metrach, a przez y_1,y_2,y_3,y_4 kolejne wyniki zapisane przez Bogdana w centymetrach, to $y_k=100x_k$ dla $k\in\{1,2,3,4\}$. Sprawdź, że $\bar{y}=100\bar{x}$.

Zapisz wzór na odchylenie standardowe danych Bogdana:

$$\sigma_B=\sqrt{\frac{\left(y_1-\bar{y}\right)^2+\left(y_2-\bar{y}\right)^2+\left(y_3-\bar{y}\right)^2+\left(y_4-\bar{y}\right)^2}{4}}.$$

Skorzystaj z zależności $y_k=100x_k$ dla $k\in\{1,2,3,4\}$ oraz $\bar{y}=100\bar{x}$.

Zadanie 122.

Dany jest zbiór $A=\{1,2,...,2n,2n+1\}$, gdzie $n\geq 1$, złożony z $2n+1$ kolejnych liczb naturalnych. Wykaż, że liczba wszystkich par (a,b) takich, że $a\in A$, $b\in A$ i $a\neq b$ oraz suma $a+b$ jest nieparzysta, jest większa od liczby par, których suma jest parzysta.

Komentarz do zadania

Tworzymy wszystkie pary liczb (a,b) takie, że $a\neq b$ oraz a,b należą do zbioru

$$A=\{1,2,3,...,2n,2n+1\}.$$

Ile w podanym zbiorze jest liczb parzystych, a ile nieparzystych, skoro wszystkich liczb jest $2n+1$ i ostatnia jest liczbą nieparzystą?

Zastanów się, kiedy suma dwóch liczb naturalnych jest parzysta. Podpowiem, że obie muszą być parzyste albo obie nieparzyste. Oblicz, ile jest takich par różnych liczb należących do zbioru *A*, których suma jest parzysta. Skorzystaj z reguły mnożenia.

Zastanów się, kiedy suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta. Podpowiem, że jedna musi być parzysta, a druga nieparzysta. Oblicz, ile jest takich par liczb należących do zbioru *A*, których suma jest nieparzysta. Pamiętaj o tym, że tworzymy pary uporządkowane, czyli para (parzysta, nieparzysta) jest inna niż para (nieparzysta, parzysta). Skorzystaj z reguły mnożenia.

Teraz, po przeprowadzeniu tych obliczeń, uzasadnij tezę.

Zadanie 123.

Rzucono 100 razy sześcienną kostką do gry. Średnia arytmetyczna liczb oczek w pierwszych 40 rzutach była równa 3,75, a średnia arytmetyczna liczb oczek w kolejnych 60 rzutach była równa 4,25. Średnia arytmetyczna liczb oczek w 100 rzutach jest

A. mniejsza od 4.

B. równa 4.

C. równa 4,05.

D. większa od 4,05.

Zadanie 124.

Zestaw danych: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ma średnią arytmetyczną a i odchylenie standardowe s.

Wykaż, że zestaw danych: $\frac{x_1-a}{s}, \frac{x_2-a}{s}, \frac{x_3-a}{s}, ..., \frac{x_n-a}{s}$ ma średnią arytmetyczną 0.

Zadanie 125.

Adam otrzymał z trzech kolejnych klasówek następujące oceny: 6, 4, 4. Oblicz, jaką ocenę otrzymał Adam z czwartej klasówki, jeżeli odchylenie standardowe otrzymanych ocen jest równe $\sqrt{\frac{11}{16}}$.

Zadanie 126.

Wszystkich par (a,b) takich, że $a \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i $b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ oraz suma $a+b$ jest podzielna przez 3, jest

A. mniej niż 21.

B. dokładnie 21.

C. dokładnie 22.

D. więcej niż 22.

Zadanie 127.

Liczb ze zbioru $Z = \{1,2,3,...,36\}$, których nie można uzyskać jako iloczynu dwóch niekoniecznie różnych liczb ze zbioru $\{1,2,3,...,6\}$, jest

A. 8 B. 16 C. 18 D. 19

Zadanie 128.

Liczb naturalnych trzycyfrowych, w zapisie których każda cyfra występuje co najwyżej raz oraz suma cyfry setek i cyfry jedności jest równa 4, jest

A. mniej niż 24.

B. dokładnie 24.

C. dokładnie 32.

D. więcej niż 32.

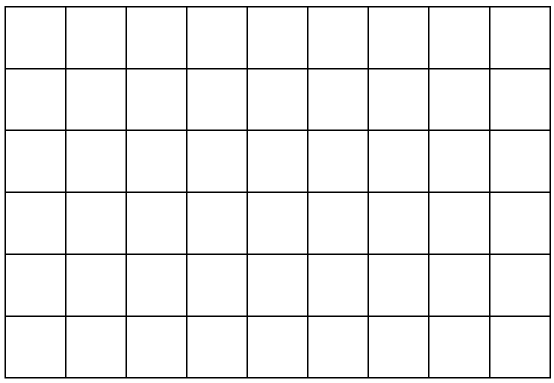
Zadanie 129.

Ile jest wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych, w zapisie których każda cyfra jest inna, żadna nie jest zerem oraz jedną z cyfr jest dziewiątka?

A. 56 B. 168 C. 216 D. 504

Zadanie 130.

Dana jest tabela złożona z sześciu wierszy i dziewięciu kolumn (zobacz rysunek). Oblicz, ile w tej tabeli można narysować, zgodnie z zaznaczonymi liniami, prostokątnych tabel o czterech wierszach i czterech kolumnach.

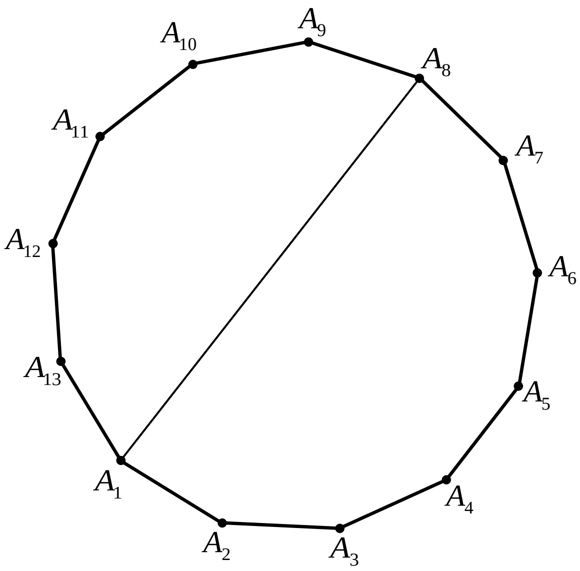


Zadanie 131.

Wszystkie losy loterii fantowej zostały ponumerowane kolejno od numeru 10000 do numeru 99999. Te losy, którym nadano numery o sumie cyfr równej trzy, są wygrywające, pozostałe losy są przegrywające. Na tej loterii będziemy losować jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu przegrywającego. Wynik przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego w przybliżeniu do czwartego miejsca po przecinku.

Zadanie 132.

Na rysunku jest przedstawiony trzynastokąt wypukły o kolejnych wierzchołkach od A_1 do A_{13} oraz przekątna A_1A_8 tego wielokąta.



Spośród wszystkich 65 przekątnych tego wielokąta losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana przekątna będzie przecinała się z przekątną A_1A_8 w punkcie leżącym wewnątrz trzynastokąta. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 133.

Spośród wierzchołków sześcianu wybieramy losowo dwa różne wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania wierzchołków, które są końcami tej samej przekątnej ściany sześcianu.

Zadanie 134.

Ze zbioru wszystkich krawędzi (krawędzi bocznych i krawędzi podstawy) ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego losujemy jedną krawędź, a następnie z pozostałych krawędzi losujemy drugą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane krawędzie będą miały wspólny wierzchołek.

2. Komentarze do zadań

2.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 3.

W liczniku ułamka $\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-16}}{-8}$ występuje iloczyn pierwiastków tego samego stopnia. Zapisz ten iloczyn w postaci jednego pierwiastka. Otrzymany wynik zapisz w postaci potęgi o podstawie 2.

Zadanie 4.

Ponieważ wszystkie zaproponowane odpowiedzi są potęgami o podstawie 2, zapisz podaną liczbę w postaci potęgi liczby 2. Wykorzystując znane wzory dotyczące potęg, otrzymasz: $2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{4} = 2^{\frac{11}{2}}$. Następnie zastanów się, czy wiesz, jaką liczbą jest liczba odwrotna do x. Liczbą odwrotną do np. $\frac{3}{4}$ jest liczba $\frac{4}{3}$, a odwrotnością liczby x ($x \neq 0$) jest liczba $\frac{1}{x}$, czyli x^{-1}. Zatem odwrotnością liczby $2^{\frac{11}{2}}$ jest liczba

$$\frac{1}{2^{\frac{11}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{2}} = 2^{-\frac{11}{2}}.$$

Zadanie 5.

Mnożenie potęg jest możliwe wtedy, gdy potęgi mają takie same podstawy lub takie same wykładniki. Zapisz wszystkie czynniki w postaci potęgi o tej samej podstawie, a następnie zastosuj prawa działań na potęgach.

$$\sqrt[3]{4^{-1}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{3}} = 4^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}.$$

Po wykonaniu działań na potęgach otrzymasz odpowiedź D.

Zadanie 6.

Możesz zapisać liczbę 72 w postaci iloczynu potęg liczb 2 i 3 oraz skorzystać z twierdzenia o logarytmie iloczynu i logarytmie potęgi.

Zadanie 7.

Możesz skorzystać z tego, że $1=\log_5 5$. Oznacza to, że $2=2\cdot1=2\cdot\log_5 5$. Jeżeli zastosujesz teraz wzór na logarytm potęgi, to otrzymasz: $2=\log_5 5^2=\log_5 25$. Liczba o 2 większa od $\log_5 4$ to inaczej $\log_5 4+2$, czyli $\log_5 4+\log_5 25$. Stosując wzór na logarytm iloczynu, otrzymasz ostatecznie $\log_5 4+2=\log_5 4+\log_5 25=\log_5(4\cdot25)=\log_5 100$. Zatem poprawna odpowiedź to D.

Zadanie 8.

W zadaniu podana jest roczna stopa procentowa. Najpierw trzeba więc ustalić, w jakiej wysokości naliczane są odsetki co kwartał. W roku mamy cztery kwartały, więc oprocentowanie w tym okresie wyniesie $\frac{p\%}{4}=\frac{p}{400}$. Zatem po upływie pierwszego takiego okresu wartość lokaty wyniesie $1000\left(1+\frac{p}{400}\right)$. Po upływie roku (czyli czterech takich okresów) wartość ta wyniesie $1000\left(1+\frac{p}{400}\right)^4$, co można otrzymać, korzystając np. ze wzoru na procent składany.

Zadanie 9.

Wykorzystując podany stosunek boków, możesz uzależnić długość każdego z nich od jednej zmiennej, np. x. Otrzymasz stąd, że $a=3x$, $b=5x$, $c=7x$. Aby ustalić, które zdanie jest fałszywe, musisz kolejno obliczyć, jakim procentem (bądź ułamkiem) sumy liczb a i b jest liczba c, jakim procentem (bądź ułamkiem) sumy liczb $a+b+c$ jest liczba a, jakim procentem (bądź ułamkiem) sumy liczb b i c jest liczba a oraz jakim procentem (bądź ułamkiem) liczby c jest liczba b.

Obliczając kolejne stosunki, otrzymasz:

$\frac{c}{a+b}=\frac{7x}{3x+5x}=\frac{7}{8}=87{,}5\%$, $100\%-87{,}5\%=12{,}5\%$ — prawda,

$\frac{a}{a+b+c}=\frac{3x}{3x+5x+7x}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=20\%$ — prawda,

$\frac{a}{b+c}=\frac{3x}{5x+7x}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=25\%$ — prawda,

$\frac{b}{c}=\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}=71\frac{3}{7}\%$ — **nieprawdą** jest, że liczba b to 60% liczby c.

Zatem odpowiedź D jest fałszywa.

Zadanie 10.

Ponieważ oprocentowanie jest podane w skali roku (tj. trzy razy cztery miesiące), najpierw musisz ustalić, jakie będzie oprocentowanie w okresie czterech miesięcy (wystarczy oprocentowanie roczne podzielić przez trzy). Stosując np. wzór na procent składany. możesz ustalić wartość lokaty po upływie 8 miesięcy, tj. po dwóch czteromiesięcznych okresach. Niewiadomą w uzyskanym wyrażeniu będzie wartość kwoty wpłaconej na początku. Wyrażenie to przyrównaj do wartości lokaty wraz z odsetkami i stąd wylicz kwotę, którą wpłacono na początku.

Zadanie 11.

Jeśli x oznacza liczbę uczniów w szkole na początku pierwszego roku, to jak zapisać liczbę uczniów na końcu pierwszego roku? Zauważ, że zmniejszyła się ona o $0{,}1x$ (wygodniej ci będzie zapisywać procenty w postaci ułamków).

Jak zapisać liczbę uczniów na koniec drugiego roku? Jak się ta liczba ma do x?

Jeśli w trzecim roku liczba uczniów zmalała o $y\%$, to jak się ona ma do liczby uczniów na końcu drugiego roku?

Liczba uczniów na początku pierwszego roku i na końcu trzeciego roku jest taka sama. Ułóż odpowiednie równanie.

Zadanie 12.

Ponumeruj autobusy kolejnymi liczbami 1, 2,..., 10 według liczby pasażerów nimi podróżujących i oznacz liczbę pasażerów w i-tym pojeździe przez p_i, więc

$$p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_k \ge 50 > p_{k+1} \ge \ldots \ge p_9 \ge p_{10},$$

gdzie k to liczba autobusów przepełnionych.

Zapisz w postaci ułamka procent przepełnionych autobusów oraz procent pasażerów podróżujących w przepełnionych autobusach. Następnie zbadaj znak różnicy tych ułamków. Zwróć uwagę na to, że możesz zapisać szacowania:

$$(10-k)(p_1+p_2+\ldots+p_k) \ge 50(10-k)k,$$

$$k(p_{k+1}+\ldots+p_{10}) < 50k(10-k).$$

Podaj odpowiedź!

Zadanie 13.

Korzystając ze wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym, zapisz liczby a i b w postaci jednego logarytmu. Następnie oblicz $a+b$, korzystając z działań na logarytmach.

Zadanie 14.

Czy możesz sumę logarytmów o tej samej podstawie zapisać w innej postaci? Zauważ, że $\log_{3x}\left(3x^2 \cdot 9x\right) = \log_{3x}(3x)^3$. Jaka jest wartość wyrażenia $\log_{3x}(3x)^3$?

Zadanie 15.

Odczytaj współrzędne punktów podanych na rysunku: $A=(3,2)$, $B=(5,-4)$, $C=(-3,-1)$. Korzystając ze wzoru na prostą przechodząca przez dwa punkty, wyznacz równania prostych przechodzących przez każdą parę punktów.

Prosta *AC* ma równanie: $y=\frac{-1-2}{-3-3}(x-3)+2$, czyli $x-2y=-1$.

Prosta *AB* ma równanie: $y=\frac{-4-2}{5-3}(x-3)+2$, czyli $3x+y=11$.

Prosta *BC* ma równanie: $y=\frac{-1+4}{-3-5}(x+3)-1$, czyli $3x+8y=-17$.

Ponieważ żadna z tych prostych nie jest równoległa do osi *Oy*, to możesz również skorzystać z postaci kierunkowej prostej i po podstawieniu dwóch punktów wyznaczyć jej równanie. Np. prosta *AC* ma równanie $y=ax+b$. Podstawiasz współrzędne obu punktów: $2=3a+b$ i $-1=-3a+b$. Stąd $a=b=\frac{1}{2}$. Zatem równanie przybiera postać $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, stąd $2y=x+1$, czyli $x-2y=-1$.

Mając wszystkie trzy proste, sprawdź, który z podanych w odpowiedzi układów zawiera te równania. Jest nim układ *A*.

Zadanie 16.

Zacznij od wyznaczenia *A* i *C* — punktów przecięcia, odpowiednio, prostych: $y=\frac{1}{2}x+1$ i $y=7-x$ z osią *Ox* (czyli prostą $y=0$) oraz punktu wspólnego tych dwóch prostych (oznaczmy go *B*). W ten sposób otrzymasz współrzędne wierzchołków trójkąta *ABC*. Punkty *A* i *C* leżą na osi *Ox*. Jaka jest odległość między nimi?

Punkt *B* znajdzie się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, więc wysokość trójkąta poprowadzona z tego wierzchołka będzie równa drugiej współrzędnej tego punktu. Teraz wystarczy już tylko zastosować wzór na pole trójkąta.

Możesz również skorzystać ze wzoru na pole trójkąta, podstawiając do niego współrzędne wierzchołków: $\frac{1}{2}\cdot\left|(4-(-2))\cdot(0-0)-(7-(-2))\cdot(3-0)\right|=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$.

Zadanie 17.

Przekształć równania (podane w układach równań) do postaci kierunkowej i wykorzystaj związki między współczynnikami kierunkowymi różnych prostych równoległych (układ sprzeczny) i pokrywających się (nieskończenie wiele rozwiązań). Otrzymasz w ten sposób warunki, jakie muszą spełniać *a* i *b*. Wybierz te wartości *a* i *b*, dla których warunki obu układów są spełnione jednocześnie.

Zadanie 18.

Zauważ, że skoro rozwiązaniem układu jest para liczb całkowitych dodatnich, to odpowiadający jej punkt musi należeć do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Podana prosta w tej ćwiartce przechodzi przez dwa punkty o współrzędnych całkowitych i tylko jeden z nich ma różne współrzędne. Informacje te pozwalają dokładnie ustalić, jak wygląda rozwiązanie układu. Musisz teraz wykorzystać to rozwiązanie do wyznaczenia drugiego równania układu wiedząc, że opisuje ono prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych i znaleziony wcześniej punkt.

Zadanie 19.

Podany przedział jest rozwiązaniem takiej nierówności, w której występuje funkcja kwadratowa zerująca się w końcach tego przedziału. Jej wzór możesz napisać korzystając z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej. Ponieważ końcami przedziału są liczby $x=-3$ i $x=1$, to funkcję możemy zapisać w postaci $y = a \cdot (x+3)(x-1)$. W żądanej nierówności współczynnik przy x^2 jest równy 1, więc można przyjąć $a = 1$, a wtedy podany przedział jest rozwiązaniem nierówności $(x+3)(x-1) < 0$. Po przekształceniu nierówność ta przybiera postać $x(x+2) < 3$.

Inny sposób to oczywiście rozwiązywanie podanych nierówności i sprawdzenie, w którym przypadku otrzymamy dany przedział.

Zadanie 20.

Zauważ, że punkty o współrzędnych $\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$ oraz $\left(6, -2\frac{1}{2}\right)$ są symetryczne względem prostej $x = 3$. Prosta ta jest osią symetrii wykresu funkcji *f* opisanej w zadaniu.

Zauważ, że jeśli jednym miejscem zerowym funkcji *f* jest $x = 1$, to drugim miejscem zerowym jest $x = 5$. Zastanów się, jak są skierowane ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji *f*.

Zadanie 21.

Jeśli długość dłuższego boku prostokąta jest równa x, to jak możesz zapisać pole prostokąta? Zapisz nierówność wynikającą z warunków zadania i rozwiąż ją. Pamiętaj, że długość boku musi być dodatnia, więc x musi być większe od 5. Z treści zadania wynika, że długość dłuższego boku prostokąta jest liczbą parzystą, zatem z otrzymanego zbioru wybierz wartość x spełniającą ten warunek.

Zadanie 22.

Każde z podanych równań jest takim równaniem liniowym, które ma jedno rozwiązanie. Sprawdź, które z podanych równań nie jest przekształceniem wyjściowego równania do postaci równania liniowego. Do tego celu wykorzystaj własność proporcji.

Zadanie 23.

Odwrotnością wyrażenia $\frac{1}{x+1}$ dla $x \neq -1$ jest $x+1$. Ułóż równanie wynikające z treści zadania i rozwiąż je. Pamiętaj, aby sprawdzić, czy otrzymane rozwiązania nie są sprzeczne z założeniem $x \neq -1$.

Zadanie 24.

Zauważ, że jeśli pompa napełnia pusty basen w ciągu x godzin, to w ciągu jednej godziny napełni $\frac{1}{x}$ część basenu. Zatem czas i wydajność to zależności odwrotnie proporcjonalne. Jeżeli przez w oznaczysz część objętości basenu, jaką napełnia w ciągu jednej godziny druga pompa, to wyrażenie $\frac{1}{w}$ opisuje czas samodzielnego napełniania basenu tą pompą. Wiesz, że wydajność pierwszej pompy jest o 20% większa. Zapisz, za pomocą niewiadomej w, wyrażenie opisujące wydajność pierwszej pompy oraz czas samodzielnego napełnienia basenu przez tę pompę. Następnie zapisz równanie uwzględniające wydajność i porównujące czas samodzielnego napełniania basenu przez każdą z pomp. Wykorzystaj fakt, że druga pompa musi pracować o 1 godzinę i 40 minut dłużej (pamiętaj o zamianie minut na godziny). Rozwiąż równanie z niewiadomą w. Oblicz jeszcze, jaką część basenu napełnią obie pompy w ciągu jednej godziny.

Zadanie 25.

Które punkty wystarczą do wyznaczenia zbioru rozwiązań nierówności $f\left(x\right)\le 0$?

Zaznacz na rysunku drugie miejsce zerowe funkcji *f*, wiedząc, że osią symetrii wykresu funkcji *f* jest prosta o równaniu $x=-3$, i rozwiąż $f\left(x\right)\le 0$.

Zbiorem rozwiązań jest przedział $\left\langle -9,3\right\rangle$.

Zadanie 26.

Oblicz $W\left(-1\right)$ i $W\left(1\right)$. Rozwiąż zapisane w treści zadania równanie $W\left(-1\right)+W\left(1\right)=0$ i oblicz *a*. Otrzymujesz $a=\frac{3}{2}$.

Zadanie 27.

Sprowadź wszystkie liczby do wspólnej podstawy, np. 4, i porównaj wykładniki:

$$\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)}=4^4,$$

$$2^{\left(2^{2^2}\right)}=2^{2^4}=2^{16}=4^8,$$

$$\left(2^{2^2}\right)^2=16^2=4^4,$$

$$2^{\left(2^2\right)^2}=2^{4^2}=2^{16}=4^8.$$

2.2. Funkcje

Zadanie 31.

Przyjrzyj się wykresom funkcji *f* i *g*. Jak przekształcić wykres funkcji *f*, żeby otrzymać wykres funkcji *g*?

Wykres funkcji *g* jest obrazem wykresu funkcji *f* w symetrii osiowej względem osi *Ox*. Jakim wzorem określona jest funkcja, której wykres jest obrazem wykresu danej funkcji w symetrii względem osi *Ox*?

Zadanie 32.

Zwróć uwagę na to, jakie wartości może przyjmować funkcja $g(x)=x^2+4x-1$ w przedziale $\left\langle 1,3\right\rangle$. Czy umiesz podać zbiór wartości tej funkcji? Jaka postać funkcji kwadratowej może pomóc w podaniu zbioru wartości funkcji *g*? Możesz także wykorzystać wykres funkcji *g*.

Zwróć uwagę na to, że funkcja *g* przyjmuje tylko wartości dodatnie, a zatem wartość odwrotności wartości najmniejszej funkcji *g* jest jednocześnie wartością największą funkcji *f*.

Zadanie 33.

Zauważ, że musisz wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji f w przedziale $\langle -1;5\rangle$. Czy pierwsza współrzędna wierzchołka wykresu funkcji f należy do przedziału $\langle -1;5\rangle$? Jakie wartości funkcja f przyjmuje na końcach przedziału $\langle -1;5\rangle$? Naszkicuj wykres funkcji f. Gdzie funkcja f przyjmuje wartość największą? Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą? Teraz zapisz przedział, który jest zbiorem wartości funkcji f.

Zadanie 34.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 1 oraz 3, więc osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta $x=2$. Na tej prostej leży wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f. Zastanów się, jakiego przesunięcia wykresu funkcji f należy dokonać, aby wierzchołek przesuniętej paraboli leżał na osi Oy.

Możesz sporządzić rysunek i na jego podstawie ustalić, że należy wykonać przesunięcie wykresu funkcji f o dwie jednostki w lewo (wzdłuż osi Ox); to oznacza, że wszystkie punkty, które leżą na wykresie funkcji f, zostaną w ten sposób przesunięte.

Znajdź współrzędne obrazu punktu $(0,-3)$ i miejsc zerowych po przesunięciu.

Zapisz wzór funkcji g w postaci iloczynowej $g(x)=a(x+1)(x-1)$. Następnie wykorzystaj fakt, że punkt $(-2,-3)$ leży na wykresie funkcji g.

Zadanie 35.

I sposób

Korzystając z tego, że w zadaniu podane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej, możesz napisać jej postać iloczynową.

Brakujący współczynnik a możesz obliczyć, korzystając z tego, że wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(-2,10)$, czyli $f(-2)=10$.

Możesz teraz przystąpić do obliczenia współrzędnych (p,q) wierzchołka paraboli. Pierwsza współrzędna wierzchołka jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych funkcji f.

Drugą współrzędną wierzchołka paraboli możesz obliczyć, korzystając ze wzoru funkcji f: $q=f(p)$. Po wyznaczeniu współrzędnych wierzchołka zastosuj wzór na odległość między dwoma punktami, aby wyznaczyć odległość wierzchołka od początku układu współrzędnych.

II sposób

Korzystając z tego, że w zadaniu podane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej, możesz obliczyć pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f. Jest ona średnią arytmetyczną miejsc zerowych funkcji. Teraz możesz zapisać wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Do obliczenia pozostały współczynniki a i q. Wykorzystaj fakt, że wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(-2,10)$, zatem $f(-2)=10$ i $f(3)=0$. Po wyznaczeniu współrzędnych wierzchołka zastosuj wzór na odległość między dwoma punktami, aby wyznaczyć odległość wierzchołka od początku układu współrzędnych.

Zadanie 36.

W rozwiązaniu skorzystaj ze wzorów na współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zauważ, że jeżeli punkt leży na prostej o równaniu $y = -5$, to jego druga współrzędna jest równa -5. Zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli $q = -5$.

Możesz wykorzystać wzór na drugą współrzędną wierzchołka paraboli do obliczenia współczynnika a funkcji f. Po obliczeniu współczynnika a ponownie wykorzystaj wzór na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli i oblicz ją.

Innym sposobem obliczenia współczynnika a funkcji f jest wykorzystanie wzoru na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli oraz zależności $f(p) = q$. Po obliczeniu współczynnika a ponownie wykorzystaj wzór na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli i oblicz ją.

Zadanie 37.

Aby obliczyć c, przyjrzyj się najpierw funkcji f. Z postaci funkcji kwadratowej wynika, że jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Taka funkcja największą wartość przyjmuje w wierzchołku. Ponieważ zbiorem wartości funkcji jest przedział $\left(-\infty, 7\right\rangle$, to liczba 7 jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli. Oblicz pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f: $p = \frac{2}{-\frac{2}{3}} = -3$. Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $p = -3$, $q = 7$, zatem $f(-3) = 7$. Stąd otrzymujesz równanie $-\frac{1}{3} \cdot 9 + 6 + c = 7$, którego rozwiązaniem jest $c = 4$.

Zadanie 38.

Funkcja kwadratowa podana jest w zadaniu w postaci kanonicznej. Odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji. Porównaj największą wartość funkcji f z drugą współrzędną wierzchołka paraboli. Jakie wnioski możesz teraz wyciągnąć? Wiesz już, jak skierowane są ramiona paraboli.

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli nie należy do przedziału $\left\langle -4; -2 \right\rangle$. Teraz spróbuj określić, czy funkcja jest w tym przedziale rosnąca, czy malejąca. Zauważ, że największą wartość funkcja przyjmuje dla $x = -4$, a najmniejszą dla $x = -2$.

Zadanie 39.

Jeśli miejscami zerowymi funkcji f są liczby -2 i 4, to jaka jest pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f? Jakie współrzędne ma wobec tego wierzchołek paraboli? W którą stronę są skierowane ramiona paraboli? Naszkicuj tę parabolę oraz prostą $y = 2$. Jakie jest wzajemne położenie tej prostej i wierzchołka paraboli?

Zadanie 40.

Mając dane współrzędne wierzchołka paraboli, możesz zapisać wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-1)^2+4$. Do wyznaczenia wzoru funkcji są jednak potrzebne współrzędne jeszcze jednego punktu, który leży na paraboli.

Jak wyznaczyć współrzędne punktu *A* lub *B*?

Odcinek *AB* jest podstawą trójkąta *ABC*, którego pole jest równe 8. Odczytaj z rysunku, jaka jest wysokość tego trójkąta i oblicz długość odcinka *AB*.

Prosta $x=1$, na której leży wierzchołek paraboli, jest osią symetrii trójkąta *ABC* (czy wiesz, dlaczego?), więc punkty *A* i *B* leżą w odległości 2 od tej prostej. Stąd $A=(-1,0)$, $B=(3,0)$.

Wykorzystaj współrzędne punktu *A* lub *B* do wyznaczenia współczynnika *a* we wzorze funkcji *f*.

Zadanie 41.

Pierwszy i drugi odcinek łamanej, czyli odcinki A_1A_2 i A_2A_3, mają długość 1, trzeci i czwarty mają długość 2, piąty i szósty mają długość 3 itd. Początkowe składniki sumy długości odcinków łamanej są więc równe $(1+1)+(2+2)+(3+3)+\ldots$. Czy wiesz, ile są równe długości dwóch ostatnich odcinków łamanej składającej się z $2n$ odcinków, czyli dwa ostatnie składniki sumy?

Aby zapisać wyznaczoną sumę, a więc wzór funkcji *f*, wykorzystaj wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Na koniec oblicz wartość funkcji dla argumentu $n=33$.

Zadanie 42.

Aby obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym, możesz skorzystać z jedynki trygonometrycznej

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

oraz

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{2}\,.$$

Miarę kąta β w trójkącie prostokątnym możesz wyrazić w zależności od kąta α; w tym celu należy zapisać równość $\beta=90^\circ-\alpha$.

Teraz do obliczenia wartości funkcji $\cos\beta$ skorzystaj ze wzoru $\cos\beta=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

Uwaga: Pamiętaj, że nie jest to jedyny sposób rozwiązania tego zadania.

Zadanie 43.

Wyznacz za pomocą jedynki trygonometrycznej $\cos 72^\circ$ w zależności od *a* i otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia liczby $1+\mathrm{tg}^2 72^\circ$.

Zadanie 44.

Zauważ, że w zadaniu podana jest wartość funkcji $\mathrm{tg}\alpha = 3$, natomiast twoim zadaniem jest obliczenie wartości wyrażenia $\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha - 5\sin\alpha}$, w którym nie występuje $\mathrm{tg}\alpha$. Wykorzystaj zależność $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, czyli $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$ i wyznacz z niej jedną z wielkości: $\sin\alpha$ lub $\cos\alpha$. Następnie wyrażenie $\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha - 5\sin\alpha}$, którego wartość masz obliczyć, zapisz przy pomocy tylko jednej z wielkości $\cos\alpha$ lub $\sin\alpha$. W otrzymanym wyrażeniu zredukuj wyrazy podobne i zapisz liczbę, jaką otrzymałeś.

Zadanie 45.

Uzależnij $\mathrm{tg}\alpha$ od $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$. Korzystając z zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wyznacz $\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta$ w zależności od $\sin\alpha$. Mając dane $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, możesz skorzystać z jedynki trygonometrycznej do wyznaczenia $\sin\alpha$, a więc również $\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta$. W rozwiązaniu uwzględnij to, że $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Zadanie 46.

Czy znasz jakąś zależność wiążącą ze sobą sinus i cosinus tego samego kąta? Jeżeli tak, to możesz wyznaczyć, jaką wartość ma a. Trzeba pamiętać, że kąt α jest kątem ostrym. Jak wpływa to na wartości funkcji sinus i cosinus kąta α?

Masz przed sobą zadanie wyliczenia funkcji tangens kąta α. Jaki jest związek funkcji sinus i cosinus kąta α z funkcją tangens tego kąta?

Jeżeli znasz wartość a i wartości sinusa i cosinusa kąta α, to obliczysz już tangens kąta α.

Zadanie 47.

Ponieważ podany jest $\cos\alpha$, to, korzystając z jedynki trygonometrycznej, możesz wyznaczyć $\sin\alpha$ (uwzględnij przy tym założenie, że α jest kątem ostrym). Mając wartości obu funkcji, obliczysz wartość $\mathrm{tg}\alpha$. Po wyznaczeniu liczb a i c oblicz średnią arytmetyczną wszystkich trzech liczb.

Zadanie 48.

Zastosuj jedynkę trygonometryczną przy obliczaniu wartości funkcji $\mathrm{tg}\alpha$. Co wynika z równości $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$?

Zadanie 49.

Zadanie wymaga znalezienia wszystkich wartości x, dla których $f(x) = 2$. Ułóż odpowiednie równanie i sprowadź je do równania kwadratowego. Upewnij się, że otrzymane rozwiązania należą do dziedziny funkcji wymiernej (sprawdź, czy otrzymane rozwiązania nie zerują mianownika).

Zadanie 50.

Zauważ, że wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $\langle 0,4\rangle$ musi zawierać wierzchołek paraboli; w przeciwnym razie funkcja przyjmowałaby w tym przedziale najmniejszą wartość na jednym z końców przedziału (byłaby rosnąca lub malejąca). Z warunków zadania wynika, że wierzchołkiem jest punkt $(2,\ f(2))$, a ramiona wykresu są skierowane w górę. Co ten ostatni warunek mówi o współczynniku a? Jak można pierwszą współrzędną wierzchołka wyrazić za pomocą współczynników funkcji kwadratowej? Co z tego wynika dla b?

Zadanie 51.

Zastanów się: kiedy funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość dla dwóch różnych argumentów? Przypomnij sobie, że wykres funkcji kwadratowej ma oś symetrii — co to znaczy? Czy argumenty –2 i 5 też są symetrycznie rozłożone po obu stronach osi symetrii wykresu danej funkcji? Zauważ, że z warunku zadania (wartości $f(0)$, $f(3)$ są równe i większe od wartości przyjmowanych przez f wewnątrz przedziału $\langle 0,3\rangle$) wynika, że ramiona wykresu funkcji f są skierowane w górę.

2.3. Ciągi

Zadanie 54.

Jaka jest zależność między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że trójwyrazowy ciąg jest arytmetyczny, gdy środkowa liczba jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Spróbuj na tej podstawie zapisać za pomocą jednego równania zależność między wyrazami naszego ciągu.

Możesz też to zadanie rozwiązać, sprawdzając, dla której z podanych wartości x podany ciąg jest arytmetyczny.

Zadanie 55.

Przedstaw sumę $a_1+a_2+a_3$ za pomocą wyrazu $a_1=8$ i różnicy ciągu r. Otrzymasz równanie z niewiadomą r, którego rozwiązaniem jest $r=3$. Teraz analogicznie zapisz sumę $a_4+a_5+a_6$ i oblicz jej wartość, korzystając z wcześniejszych obliczeń. Otrzymasz

$$a_4+a_5+a_6=3a_1+12r=60\,.$$

Zadanie 56.

Aby obliczyć ósmy wyraz ciągu (a_n), możesz od sumy ośmiu początkowych wyrazów odjąć sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu. Ile jest równy piąty wyraz ciągu (b_n)? Gdy go obliczysz, zapisz wzór ogólny ciągu (b_n). Możesz teraz obliczyć c_1 i c_{17}. Teraz wystarczy już tylko zastosować wzór na sumę 17 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 57.

Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, możesz średnią arytmetyczną wyrazów a_3 i a_{21} uzależnić od wyrazu pierwszego i różnicy ciągu. Stosując dodatkowo wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (w naszym przypadku $n=23$), możesz tę sumę również uzależnić tylko od wyrazu pierwszego i różnicy ciągu. Wystarczy teraz, że porównasz oba wyrażenia, aby wyznaczyć średnią arytmetyczną wyrazów a_3 i a_{21}.

Zadanie 58.

Pamiętasz, że w ciągu arytmetycznym (a_n), o różnicy r, dla każdego $n \geq 1$ prawdziwe są równości: $a_{n+1} - a_n = r$, $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Aby wykazać, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, możesz

1) obliczyć b_1, a następnie wykazać, że istnieje liczba r_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $b_n = b_1 + (n-1)r_1$

lub

2) wykazać, że istnieje liczba r_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $b_{n+1} - b_n = r_1$.

Zadanie 59.

Korzystając ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów i na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, zapisz podaną w zadaniu sumę wyrazów w zależności od wyrazu pierwszego i różnicy tego ciągu. Następnie to samo zrób dla wyrazu środkowego. Możesz też każdy wyraz ciągu uzależnić od wyrazu środkowego i różnicy ciągu i wtedy obliczyć sumę. Porównując uzyskane wyrażenia, sprawdź, czy suma jest wielokrotnością wyrazu środkowego (czy jest on dzielnikiem sumy).

Zadanie 60.

Zastanów się, jak „odległe” są wyrazy pierwszy i siódmy od wyrazu czwartego? Zastosuj wzór $a_{n+1}^2 = a_1 \cdot a_{2n+1}$.

Zadanie 61.

Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, zapisz wzory na a_k i a_{k+2}. Otrzymasz w ten sposób dwa równania zależne tylko od k i ilorazu ciągu q. Wykorzystując odpowiednie przekształcenia (m.in. działania na potęgach), otrzymasz z nich równanie z niewiadomą q. Po jej wyznaczeniu (ile będzie takich rozwiązań?) możesz ponownie zastosować wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego i obliczyć a_{10}.

Zadanie 62.

Rozwiązanie zadania rozpocznij od odpowiedzi na następujące pytanie: Jeśli każdego dnia wydatki były niższe o 20% w stosunku do wydatków z dnia poprzedniego, to jaką część wydatków z dnia poprzedniego stanowią wydatki z dnia następnego? Wyraź tę wielkość w postaci ułamka. Zauważ, że kwoty wydawane przez Kacpra w kolejnych dniach stanowią pewien ciąg. Jaki to ciąg? Jaką szczególną wielkością dla danego ciągu jest zapisany uprzednio ułamek? Podpowiem, że jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = 0{,}8$. Piątego dnia Kacper wydał 20,48 zł. Który to wyraz ciągu? Skorzystaj ze wzoru ogólnego na n-ty wyraz ciągu geometrycznego i oblicz a_1. Kwota, jaką Kacper wydał w ciągu pięciu dni, będzie sumą pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 63.

Wyrazy ciągu (a_n) są różne od 0 i nie powtarzają się. Czy iloraz q może być równy 0 lub 1? Ułóż równanie wynikające z treści zdania. Zauważ, że a_4 i a_5 możesz zapisać np. za pomocą a_3 i q. Rozwiąż równanie i zastanów się, czy wszystkie otrzymane wartości q spełniają warunki zadania.

Zadanie 64.

W ciągu geometrycznym (a_n), o wszystkich wyrazach różnych od zera i ilorazie q, dla każdego $n \geq 1$ prawdziwe są równości: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Aby wykazać, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, możesz

1) obliczyć b_1, a następnie wykazać, że istnieje liczba q_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $b_n = b_1 \cdot q_1^{n-1}$

lub

2) wykazać, że istnieje liczba q_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q_1$.

Zadanie 65.

W ciągu geometrycznym (a_n), o wszystkich wyrazach różnych od zera i ilorazie q, dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

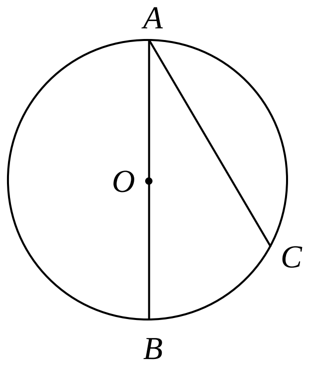
Musisz więc wykazać, że dla ciągu (a_n) opisanego w zadaniu iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f(3(n+1))}{f(3n)}$ jest wielkością stałą i różną od zera.

Zadanie 66.

Korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego, zapisz iloczyn podanych wyrazów w zależności od wyrazu pierwszego i ilorazu tego ciągu. To samo zrób dla wyrazu trzeciego. Porównaj oba wyrażenia i sprawdź, czy ten iloczyn da się uzależnić tylko od wyrazu trzeciego. Możesz też każdy wyraz ciągu uzależnić od wyrazu trzeciego oraz ilorazu ciągu i wtedy obliczyć ich iloczyn.

2.4. Geometria

Zadanie 70.



Kąt ACB jest kątem wpisanym opartym na półokręgu, więc $|\sphericalangle ACB| = 90°$.

Wynika z tego, że trójkąt ABC jest prostokątny o przeciwprostokątnej $|AB| = 2r$ i przyprostokątnej $|AC| = r\sqrt{3}$.

Oblicz miary kątów tego trójkąta. Skorzystaj z funkcji cosinus w tym trójkącie $\cos|\sphericalangle BAC| = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd otrzymasz $|\sphericalangle BAC| = 30°$.

Kąt BOC jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany BAC.

Czy wiesz, jaka jest zależność między kątem wpisanym i kątem środkowym, jeśli oba są oparte na tym samym łuku?

Z zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym otrzymasz $|\sphericalangle BOC| = 60°$.

Uwaga: Do obliczenia miary kąta BAC możesz też wykorzystać własności połowy trójkąta równobocznego.

Zadanie 71.

Możesz np. wykorzystać to, że kąty BEC i BDC są oparte na tym samym łuku, co oznacza, że są równe. Ponieważ kąt BCD jest oparty na półokręgu, to jest kątem prostym. Mamy zatem trójkąt o dwóch znanych kątach i kącie, którego miarę trzeba obliczyć.

Zadanie 72.

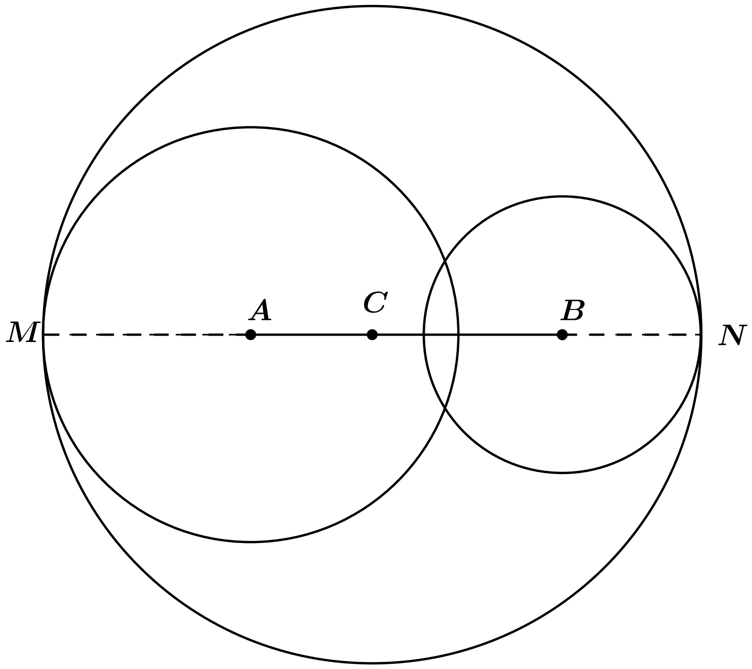
Możesz np. wykorzystać to, że kąt środkowy BOC jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany BAC, więc jest od niego dwa razy większy. Uwzględniając to, że trójkąt BOC jest równoramienny, możesz teraz znaleźć zależność dla kątów α i β.

Zadanie 73.

Aby wykazać, że prosta BE zawiera wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok AC, wystarczy udowodnić, że prosta BE jest prostopadła do boku AC. Zauważ, że kąt BED jest kątem wpisanym opartym na półokręgu oraz wykorzystaj równoległość odcinków DE i AC.

Zadanie 74.

Przedstaw na rysunku sytuację opisaną w zadaniu, np. tak jak poniżej.



Odcinek *MN* jest średnicą poszukiwanego okręgu o środku w punkcie *C*.

Do obliczenia długości odcinka *MN* wykorzystaj zależności między długościami promieni okręgów i odległością ich środków, gdy okręgi są styczne wewnętrznie:

$$|MN| = |MA| + |AB| + |BN|.$$

Promień okręgu o środku *C* jest równy $\frac{1}{2} \cdot |MN| = \frac{19}{2} = 9,5$.

Zadanie 75.

Spróbuj uzupełnić rysunek o elementy, które mogą pomóc rozwiązać zadanie.

Na pewno przydać się mogą środki tych okręgów, odcinek łączący środki okręgów oraz odcinki łączące środki okręgów z odpowiednimi punktami styczności.

Czy punkty styczności i środki okręgów tworzą jakąś szczególną figurę? Czy możesz zapisać długości jej boków tylko za pomocą promieni okręgów?

Czy dostrzegasz jakiś trójkąt prostokątny o bokach uzależnionych tylko od długości tych promieni?

Jeżeli znajdziesz taki trójkąt, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapiszesz związek prowadzący do tezy.

Zadanie 76.

Zauważ, że pole czworokąta *SKTL* jest sumą pól dwóch przystających trójkątów prostokątnych *SKT* oraz *SLT*. Pomocny będzie tu rysunek przedstawiający dwa okręgi styczne wewnętrznie, z zaznaczonymi w nich odpowiednimi punktami i odcinkami (promień, środek okręgu, punkty styczności). Aby obliczyć pole trójkąta prostokątnego (*SKT* lub *STL*), wyznacz długości jego przyprostokątnych.

Zauważ, że jedną z przyprostokątnych jest promień okręgu O_2. Druga przyprostokątna to odcinek *SK*; skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć jego długość.

Znając długości przyprostokątnych trójkąta, możesz obliczyć jego pole oraz pole czworokąta *SKTL*.

Możesz również zauważyć, że odpowiednio obracając jeden z trójkątów prostokątnych (*SKT* lub *STL*), otrzymasz trójkąt równoramienny. Jego pole jest równe polu rozważanego czworokąta.

Zadanie 77.

Czy odcinki powstałego sześciokąta mają jakieś szczególne wzajemne położenie? Czy małe trójkąty, które powstały po odcięciu od trójkąta *ABC* danego sześciokąta, są podobne do trójkąta *ABC*? Czy na tej podstawie możesz obliczyć pola tych małych trójkątów uzależnione tylko od pola trójkąta *ABC* oraz wielkości *x* i *y*? Czy wiesz, jaka jest skala podobieństwa małych trójkątów do trójkąta *ABC*?

Jeżeli znasz tę skalę podobieństwa, obliczysz pola małych trójkątów i to już wystarczy do obliczenia pola sześciokąta.

Uwaga: Możesz też napisać wzory (z kątem) na pole trójkąta *ABC* i pola małych trójkątów i stąd uzyskać zależność między tymi polami, nie powołując się na podobieństwo.

Zadanie 78.

Z warunków zdania wiesz, że $|\angle CAB| = |\angle CED|$. Zauważ także, że $|\angle ACB| = |\angle ECD|$, jako kąty wierzchołkowe. Zatem trójkąty ABC i CDE są podobne na mocy cechy podobieństwa trójkątów *k*-*k*-*k*. Jaką własność mają odpowiednie boki w trójkątach podobnych?

Zapisz proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów ABC i CDE, w której uwzględnisz dane długości boków *AC*, *BC*, *CE* oraz szukaną długość boku *CD*. Z proporcji tej wyznacz długość boku *CD*.

Zamiast tego możesz np. wykorzystać fakt, że kąty BAC i BDC są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, więc są równej miary. Zauważ też, że kąt BCD jest oparty na półokręgu, więc jest kątem prostym. Teraz znajdź zależność dla kątów α i β w trójkącie prostokątnym BCD.

Zadanie 79.

Oznacz długość któregoś z odcinków: *AD*, *AE* lub *BE* i za pomocą tej wielkości wyznacz długość przeciwprostokątnej *AB*, wykorzystując fakt, że punkt *E* jest jej środkiem oraz że długość odcinka *DE* jest równa 1.

Z podobieństwa trójkątów, np. *ADC* i *ACB*, zapisz proporcję, w której jedną nieznaną wielkością będzie wprowadzona przez ciebie długość. Oblicz tę długość, a następnie długość boku *AB*.

Pozostaje teraz obliczyć długość trzeciego boku trójkąta, co można zrobić np. z twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 80.

I sposób

Jeżeli oznaczysz długości odcinków AE i EF np. przez a i b, to możesz uzależnić długości odcinków FB i EB od a i b. Korzystając z tego, w jakim stosunku punkt E podzielił podstawę, możesz wyznaczyć zależność między a i b. Ponieważ trójkąty DEB i GFB są podobne, to możesz zapisać odpowiednią proporcję odcinków tak, by wykorzystać odcinki EB, FB i odcinki, na które punkt przecięcia wysokości CF z przekątną DB podzielił tę przekątną. Ponieważ długości odcinków EB i FB zależne są od a i b, to możesz policzyć ich stosunek, tym samym uzyskując ten, którego prawdziwość trzeba wykazać.

II sposób

Jeżeli oznaczysz długości odcinków AE i EF np. przez a i b, to możesz uzależnić długości odcinków FB i EB od a i b. Korzystając z tego, w jakim stosunku punkt E podzielił podstawę, możesz wyznaczyć zależność między a i b. Ponieważ odcinki DE i CF są równoległe (oba są wysokościami trapezu), to do kąta EBD możesz zastosować twierdzenie Talesa i zapisać odpowiednią proporcję odcinków tak, by wykorzystać EF, FB i odcinki, na które punkt przecięcia wysokości CF z przekątną DB podzielił tę przekątną. Ponieważ długości odcinków EF i FB zależne są od a i b, to możesz policzyć ich stosunek, tym samym uzyskując ten, którego prawdziwość trzeba wykazać.

Zadanie 81.

Przedstaw pole trójkąta ABC w postaci sumy pól dwóch trójkątów. Do zapisania każdego z tych pól użyj wzoru z wykorzystaniem długości boków i kąta między nimi. W ten sposób otrzymasz równanie, w którym jedyną niewiadomą będzie długość odcinka CD.

Zadanie 82.

Przyjmij oznaczenie: $|\sphericalangle XCB| = \alpha$. Oblicz pole trójkąta XBC za pomocą wzoru, w którym występuje sinus kąta α. Zastanów się, jak można w inny sposób obliczyć pole tego trójkąta. Z porównania pól wyznaczysz sinus kąta α.W tym celu najpierw oblicz długości odcinków CE oraz CB.

Rozwiązanie zadania możesz też rozpocząć od obliczenia długości odcinków CE oraz CB. Następnie wyznacz pole trójkąta XBC na dwa sposoby, wykorzystując dwie różne wysokości.

Z porównania pól oblicz tę wysokość, którą wykorzystasz do wyznaczenia sinusa kąta α.

Zadanie 83.

Zauważ, że punkt A nie leży na prostej $y = 2x - 2$.

Sąsiedni wierzchołek (nazwijmy go B) jest punktem przecięcia danej prostej $y = 2x - 2$ z prostą do niej prostopadłą, która przechodzi przez punkt A. Wyznacz równanie tej prostej. Współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych obliczysz, rozwiązując układ równań liniowych.

Zastanów się, czy można wyznaczyć współrzędne środka okręgu opisanego na kwadracie, gdy znamy współrzędne jego dwóch dowolnych wierzchołków.

Jeśli są to wierzchołki kwadratu leżące naprzeciwko siebie, np. A i C, to jest to proste, bo środek okręgu S jest środkiem odcinka AC. Punkt C leży na prostej $y = 2x - 2$, więc jego współrzędne możesz zapisać w następujący sposób: $C = (x, 2x - 2)$.

Wykorzystaj równość boków kwadratu $|AB| = |BC|$ do zapisania równania, z którego obliczysz współrzędne punktu C. Istnieją dwa punkty spełniające zapisany wcześniej warunek: $C_1 = (2,\ 2)$ i $C_2 = (4,\ 6)$. Znajdź teraz środek odcinka AC_1 i środek odcinka AC_2; będą to poszukiwane środki okręgów.

Zadanie 84.

Pierwszym krokiem rozwiązania powinno być zbadanie, czy dane proste są prostopadłe.

Zauważ, że nie są prostopadłe, zatem druga przyprostokątna trójkąta może być zawarta w prostej prostopadłej do prostej $y = 2x - 3$ lub do prostej $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Zadanie 85.

Przypomnij sobie, jakie własności posiadają współczynniki kierunkowe prostych równoległych, a jakie prostych prostopadłych. Oznacz różnymi literami współczynniki kierunkowe prostych i zapisz podaną w treści zadania równość. Następnie przekształć zapisaną równość do postaci iloczynowej.

Zadanie 86.

Oblicz najpierw drugie współrzędne punktów A i B, wykorzystując informację, że punkty te należą do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{8}{x} + 3$. Ponieważ $x_A = -2$ i $x_B = 2$, zatem $y_A = f(-2)$ i $y_B = f(2)$. W wyniku krótkich obliczeń otrzymasz współrzędne punktów A i B. W drugiej części rozwiązania należy obliczyć współrzędne punktu C, wykorzystując fakt, że punkt B jest środkiem odcinka AC (możesz sporządzić rysunek pomocniczy). Wprowadzając oznaczenia $C = (x, y)$ i wykorzystując wzór na środek odcinka, otrzymasz dwa proste równania, z których obliczysz współrzędne punktu C.

Zadanie 87.

Zauważ, że odcinek AB jest średnicą okręgu. Punkt S jest środkiem cięciwy AB. Zastosuj wzór na współrzędne środka odcinka. Wykorzystaj fakt, że punkt leży na prostej, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Zadanie 88.

W rozwiązaniu zadania pomocne będzie wyszukanie par punktów symetrycznych względem innego punktu. Możesz wielokrotnie stosować wzór na współrzędne środka odcinka.

Zadanie 89.

Pierwszym krokiem będzie obliczenie długości odcinka MN. Nie ma potrzeby wyznaczania współrzędnych wierzchołków kwadratu. Jaka jest zależność między długością odcinka MN i przekątną AC kwadratu $ABCD$? Wykorzystaj podobieństwo trójkątów ACB i MNB.

Do obliczenia długości boku kwadratu wykorzystaj wzór na przekątną kwadratu lub wzór na pole kwadratu.

Zadanie 90.

Możesz narysować trójkąt *ABC* w układzie współrzędnych i znaleźć jego obraz w symetrii środkowej względem środka układu. Odczytaj z rysunku liczbę boków wielokąta, który powstał z części wspólnej narysowanych trójkątów. Zastosuj wzór na sumę kątów *n*-kąta.

Zadanie 91.

Przypomnij sobie zależność między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi *Ox*. Zapisz równanie prostej w postaci kierunkowej i zastanów się, jakie równanie ma prosta symetryczna do danej prostej w symetrii osiowej względem osi *Ox*. Rozpatrz różne położenia prostych.

Zadanie 92.

Rozpocznij zadanie od przypomnienia sobie, jak zmieniają się współrzędne punktu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Już wiesz, że obrazem punktu $P=(x,y)$ jest punkt $P_1=(-x,-y)$. Ustal zatem współrzędne punktów A_1, B_1, D_1. Możesz sporządzić rysunek w układzie współrzędnych. Następnie zwróć uwagę na własności trapezu — jego podstawy A_1B_1, C_1D_1 zawierają się w prostych równoległych, a osią symetrii tego trapezu jest prosta prostopadła do obu podstaw przechodząca przez środki tych podstaw. Aby wyznaczyć jej równanie, oblicz najpierw współczynnik kierunkowy prostej A_1B_1 i współrzędne środka odcinka A_1B_1. Na podstawie tych informacji zbuduj równanie osi symetrii. Następnie, wykorzystując równoległość prostych zawierających podstawy i współrzędne punktu D_1, napisz równanie prostej C_1D_1. Musisz jeszcze obliczyć współrzędne punktu C_1. Zauważ, że rozwiązując układ równań złożony z równań prostych C_1D_1 oraz osi symetrii, otrzymasz współrzędne punktu, który jest środkiem odcinka C_1D_1. W ostatnim etapie wykorzystaj wzór na środek odcinka i oblicz współrzędne punktu C_1.

Zadanie 93.

Połącz punkt *P* z punktem *C*. Nazwij powstałe kąty i zauważ, jaką mają własność. Zaznacz równe kąty. Następnie oblicz miarę kąta $|\sphericalangle P_{AC}CP_{BC}|$.

Możesz również rozwiązać zadanie inaczej, tj. wg następującej wskazówki.

Oznacz współrzędne punktu *P*, np. $P=(p,q)$, i zapisz współrzędne jego obrazu w symetriach względem osi układu współrzędnych. Zapisz równanie prostej przechodzącej przez dwa wybrane spośród punktów P_{BC}, P_{AC}, C.

Zadanie 94.

Czy walec i półkula mają takie same promienie? Wyznacz objętość walca i objętość półkuli (połowa objętości kuli) i dodaj je.

Zadanie 95.

Zauważ, że bokami trójkąta *ACH* są przekątna podstawy i przekątne ścian bocznych (jest to trójkąt równoramienny). Bokami trójkąta *BDG* również są przekątne ścian bocznych oraz przekątna podstawy. Zatem oba trójkąty są przystające, a to oznacza, że mają takie same kąty. Ponieważ kąt *AHC* ma 50°, to pozostałe kąty tego trójkąta mają po 65°. Kąt *DBG* jest kątem przy podstawie trójkąta równoramiennego *DBG*, więc wobec przystawania obu trójkątów też ma 65°.

Zadanie 96.

Zauważ, że z odcinków podanych na rysunku tylko *SE* i *SG* są zawarte w przeciwległych ścianach bocznych. Płaszczyzny zawierające te ściany przecinają się wzdłuż prostej równoległej do podstawy. Oba odcinki są do tej prostej prostopadłe, więc kąt między nimi (tj. kąt *ASC*) jest też kątem między ścianami. Zatem prawidłowa jest odpowiedź C.

Zadanie 97.

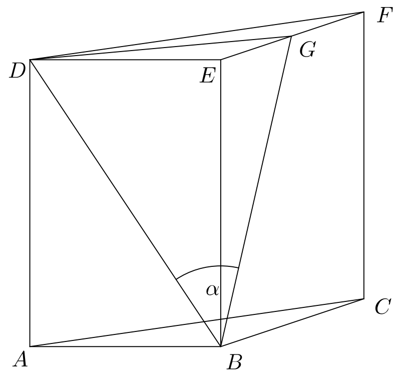
Zaznacz na rysunku kąt między wysokością trójkąta *ABF* poprowadzoną z wierzchołka *F* i płaszczyzną podstawy *ABC* tego graniastosłupa i oznacz go, np. α. Zauważ, że trójkąt *CKF*, w którym występuje kąt α, jest prostokątny.

Przyprostokątna *CF* leżąca naprzeciwko kąta α jest wysokością graniastosłupa i jest równa 8.

Oblicz drugą przyprostokątną tego trójkąta (wykorzystaj funkcje trygonometryczne). Jest ona wysokością trójkąta równobocznego *ABC*.

Wykorzystaj własności trójkąta równobocznego do obliczenia długości krawędzi podstawy graniastosłupa i z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *CKF* oblicz wysokość trójkąta *ABF*.

Zadanie 98.



Kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną w graniastosłupie to kąt między przekątną ściany bocznej, np. *BD*, i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę sąsiedniej ściany bocznej, np. *BCFE*. Środek krawędzi *EF* jest rzutem prostokątnym punktu *D*, na płaszczyznę *BCFE*. Oznacz go, np. *G*. Rzutem przekątnej *BD* na płaszczyznę *BCFE* jest odcinek *BG*.

Trójkąt *BDG* jest trójkątem prostokątnym z kątem prostym przy wierzchołku *G*, a kąt *DBG* jest poszukiwanym kątem. Oznaczmy go α.

Aby wyznaczyć miarę kąta α, wystarczy znać długości dwóch boków trójkąta *BDG*.

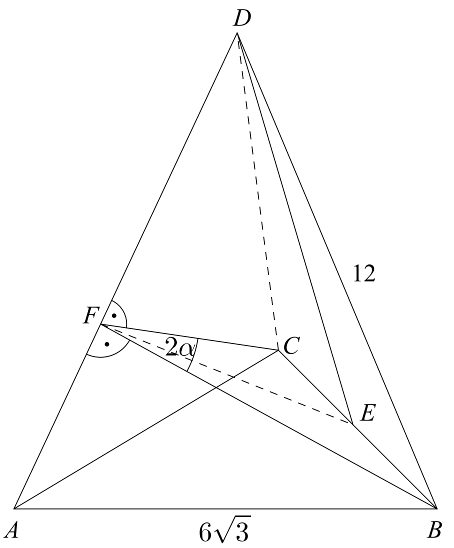
Wykorzystaj dane zadania do obliczenia wysokości graniastosłupa.

Mając wysokość graniastosłupa, wyliczysz te długości boków trójkąta prostokątnego *BDG*, które wykorzystasz do obliczenia miary kąta α. Pomocne będą funkcje trygonometryczne.

Zadanie 99.

Wprowadź oznaczenia wymiarów graniastosłupa, np. oznacz długość krawędzi podstawy przez *a*, zaś długość krawędzi bocznej przez *h*. Zaznacz na rysunku obie przekątne i kąty, które te przekątne tworzą z płaszczyzną podstawy. Zapisz związek pomiędzy długością krawędzi bocznej a długością krótszej przekątnej. Zapisz związek między długością krawędzi podstawy a długością krawędzi bocznej. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 100.



Zacznij od narysowania kąta między ścianami bocznymi danego ostrosłupa. Jakie jest położenie jego ramion względem wspólnej krawędzi tego kąta?

Pomocne będzie wprowadzenie oznaczeń, np.: kąt między ścianami to kąt *BFC,* a jego miara jest równa 2α.

Ponieważ ściany boczne są przystające, to $|BF| = |FC|$. Zatem wysokość *FE* trójkąta *BFC* dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne *BFE* i *CFE*.

Aby obliczyć miarę kąta α, możesz wyznaczyć sinus jego kąta: $\sin\alpha = \frac{|BE|}{|BF|}$. Jak wyznaczysz długości potrzebnych odcinków? Zauważ, że odcinek *BF* jest wysokością trójkąta *ABD*. Aby obliczyć jego długość, wyznacz pole tego trójkąta, przyjmując jako jego podstawę krawędź podstawy ostrosłupa, a następnie przyrównaj do pola, gdzie jako podstawę trójkąta przyjmiesz długość krawędzi bocznej.

Zadanie 101.

Sporządź rysunek: podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat, a spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu. Znasz promień okręgu opisanego na tym kwadracie — jest on połową długości przekątnej kwadratu. Oblicz bok kwadratu, wykorzystując wzór na przekątna kwadratu lub stosując twierdzenie Pitagorasa. Na jednej ze ścian bocznych zaznacz wysokość poprowadzoną z wierzchołka ostrosłupa. Kąt pomiędzy tą wysokością i wysokością ostrosłupa ma 30°. Z odpowiedniego trójkąta prostokątnego oblicz wysokość ostrosłupa. Następnie zaznacz na rysunku kąt pomiędzy jedną z krawędzi bocznych a jej rzutem prostokątnym na podstawę, czyli połową przekątnej podstawy. Wykorzystaj odpowiedni trójkąt prostokątny, w którym został zaznaczony nowy kąt. Znasz w nim obie przyprostokątne. Twoim celem jest obliczenie sinusa zaznaczonego kąta, zatem niezbędne będzie obliczenie długości przeciwprostokątnej. Wykorzystaj w tym celu twierdzenie Pitagorasa. Zastosuj wzór na sinus kąta w trójkącie prostokątnym.

Zadanie 102.

Pomocne będzie narysowanie przekroju osiowego stożka i zaznaczenie kąta między tworzącą a płaszczyzną podstawy. Następnie, korzystając z warunków zadania, wyznacz zależność między promieniem i tworzącą stożka. Mając tę zależność, oblicz wysokość stożka H, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym. Sinus szukanego kąta obliczysz jako zależność między wysokością i tworzącą stożka.

Zadanie 103.

Aby wykazać, że $|AC| = |DE|$, należy wskazać trójkąty przystające, w których te odcinki są bokami.

Rozpatrz trójkąty *ADC* i *DBE*.

Z warunków zadania wykaż, że $|CD| = |BE|$ oraz $|AD| = |BD|$.

Zauważ, że z własności trójkąta *BCD* wynika $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle DBC|$.

Porównaj teraz miary kątów *ADC* i *DBE*.

Trójkąty *ADC* i *DBE* mają takie same boki i równe kąty zawarte między tymi bokami. Zastosuj odpowiednia cechę przystawania trójkątów i wykaż tezę.

Zadanie 104.

Zapisz wzór na pole powierzchni całkowitej stożka w zależności od promienia *r* i tworzącej. Zauważ, że jest to równanie kwadratowe z niewiadomą *r*, gdzie $r \in (0,8)$. Po rozwiązaniu równania oblicz średnicę podstawy i porównaj ją z tworzącą. Jaki wniosek dotyczący kątów i wysokości stożka możesz sformułować?

Zadanie 105.

Aby obliczyć pole przekroju, określ najpierw, jaką jest figurą, sporządzając odpowiedni rysunek. Zaznacz na rysunku środki krawędzi *AD* i *CD* i naszkicuj opisany przekrój. Zauważ, że długości dwóch boków otrzymanego trójkąta są równe. Aby obliczyć długość podstawy tego trójkąta, możesz zauważyć, że jest ona równa połowie długości przekątnej podstawy graniastosłupa. Aby obliczyć wysokość trójkąta, naszkicuj ją na rysunku i skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa w odpowiednim trójkącie. Teraz możesz już obliczyć pole danego przekroju.

Zadanie 106.

Narysuj sześcian wraz z przekątną i zaznacz na nim odcinki: *AL, AJ, AC* i *LJ.* Punkt przecięcia odcinków *AC* i *LJ* oznacz przez *S.* Odszukaj trójkąty prostokątne i zaznacz podane kąty. Zapisz funkcje trygonometryczne kątów α i β, jako odpowiednie stosunki długości boków w trójkątach prostokątnych. Znajdź wspólny odcinek w trójkątach prostokątnych *ASJ* i *AOS.*

Zadanie 107.

Na rysunku odszukaj trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów jest kątem nachylenia ściany bocznej do podstawy. Wyznacz długości jego dwóch boków w zależności od jednej zmiennej (np. od długości krawędzi podstawy), korzystając z tego, że spodek wysokości ostrosłupa dzieli wysokość trójkąta równobocznego w odpowiednim stosunku. Następnie oblicz tangens szukanego kąta i podaj sam kąt.

Zadanie 108.

Zapisz wzór na pole powierzchni bocznej ostrosłupa. Jakie odcinki należy wyznaczyć, aby obliczyć to pole? Naszkicuj rysunek i zaznacz w nim kąt, o którym mowa w zadaniu. Wyznacz długość połowy przekątnej podstawy graniastosłupa, korzystając z definicji funkcji tangens. W jaki sposób, znając długość przekątnej kwadratu, obliczysz długość jego boku?

Wskaż trójkąt prostokątny, w którym będzie wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa. Zastosuj twierdzenie Pitagorasa, aby obliczyć wysokość ściany bocznej w zależności od *H*.

Wystarczy już tylko podstawić wyliczone wielkości do wzoru na pole powierzchni bocznej ostrosłupa, aby uzależnić go tylko od *H*.

Długości wszystkich potrzebnych odcinków możesz wyznaczyć, korzystając z funkcji trygonometrycznych, np. $|EC| = \frac{H}{\sin 60°} = \frac{2H}{\sqrt{3}}$, $|CS| = \frac{H}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{H}{\sqrt{3}}$, gdzie $|EC|$ jest długością krawędzi bocznej oraz $|CS|$ — długością połowy przekątnej podstawy danego ostrosłupa.

Zadanie 109.

Pomocne może być narysowanie przekroju osiowego stożka i zaznaczenie kąta α oraz zastosowanie trygonometrii w odpowiednim trójkącie prostokątnym. Skorzystaj z definicji funkcji cosinus oraz wykorzystaj daną zależność między długościami tworzącej i promienia podstawy. Po obliczeniu długości tworzącej i promienia podstawy oblicz pole powierzchni stożka.

Zadanie 110.

Wyobraź sobie, że zwiększamy kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy. Wtedy punkty *L*, *J* i *K* przesuwają się „do góry". Jeśli punkt *K* pokryje się z *G*, to kąt nachylenia przekroju, który jest czworokątem, będzie największy. Dalsze zwiększanie kąta spowoduje, że przekrój stanie się pięciokątem, następnie trójkątem. Dla jakich kątów otrzymujemy czworokąt? Zauważ, że ten czworokąt jest rombem. Zrzutuj środek odcinka *LJ* na płaszczyznę podstawy i odszukaj prostokątne trójkąty podobne. Oblicz długości przekątnych rombu.

Zadanie 111.

Zauważ, że trójkąt *AOB* jest prostokątny. Czy wiesz, gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym? Skorzystaj z własności: środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym pokrywa się ze środkiem przeciwprostokątnej. Trzeba więc znaleźć współrzędne środka odcinka *AB*.

Rozpocznij od wyznaczenia współrzędnych punktów *A* i *B*. Wyraź je w zależności od *b*.

Pole trójkąta *AOB* jest równe 16. Czy potrafisz wyrazić jego pole w zależności od *b*?

Po obliczeniu wartości współczynnika *b* zapisz współrzędne punktów *A* i *B* i znajdź środek odcinka *AB*.

Zadanie 112.

Jak zapewne pamiętasz, promień *R* koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równy $\frac{2}{3}h$, gdzie *h* oznacza wysokość tego trójkąta. Wysokość *h* trójkąta równobocznego, którego bok ma długość *a*, jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Stąd $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego.

Zadanie 113.

I sposób

Jeżeli trójkąt T jest podobny do trójkąta T_1 w skali $k = \frac{1}{6}$, to trójkąt T_1 jest podobny do trójkąta T w skali $k = 6$. Ponieważ trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T w skali $k = 3$, to trójkąt T_1 jest podobny do trójkąta T_2 w skali $k = 2$. Pole trójkąta T_1 jest więc 4 razy większe od pola trójkąta T_2 i równe 96.

II sposób

Z podobieństwa trójkątów wynika, że $P_T = \frac{1}{36} P_{T_1}$ i $P_{T_2} = 9P_T$. Z drugiej równości wynika, że $P_T = \frac{1}{9} P_{T_2}$. Stąd $\frac{1}{9} P_{T_2} = \frac{1}{36} P_{T_1}$, co oznacza, że $P_{T_1} = 4 \cdot P_{T_2} = 96$.

Zadanie 114.

Jeżeli punkt *S* jest środkiem okręgu opisanego na kwadracie *ABCD*, to odcinek *AS* jest połową przekątnej tego kwadratu. Oblicz długość odcinka *AS*.

Przekątna *d* tego kwadratu ma długość: $d = 2 \cdot |AS| = 2\sqrt{20}$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub ze wzoru na przekątną kwadratu o boku *a*, otrzymujemy: $a = 2\sqrt{10}$.

Zadanie 115.

Narysuj trójkąt prostokątny i oznacz wierzchołki, pamiętając, że kąt prosty jest przy wierzchołku *A*. Jak można zapisać $\sin(\angle ABC)$ jako stosunek długości dwóch boków trójkąta? Jeśli oznaczysz długość boku *AB* przez *x*, to jak można wyrazić za pomocą *x* długość boku *BC*? A boku *AB*? Jak jest zdefiniowany tangens w trójkącie prostokątnym?

Zobacz też inny przykładowy sposób rozwiązania zadania.

Zadanie 116.

Zainteresuj się czworokątem *AOBP*. Zapewne umiesz określić miary kątów przy wierzchołkach *A* i *B*; to kąty między styczną do okręgu a promieniem okręgu poprowadzonym do punktu styczności. Jaka jest suma kątów wewnętrznych czworokąta?

Zadanie 117.

Jednym z punktów należących do środkowej poprowadzonej do boku *AB* jest punkt *C*. Jeśli znajdziesz drugi, będziesz mógł ułożyć jej równanie. Takim punktem jest środek boku *AB*. Oblicz współrzędne tego punktu. Znając dwa punkty, możesz obliczyć współczynniki równania środkowej.

Zadanie 118.

Dowolny punkt leżący na prostej danej równaniem $x = a$ ma pierwszą współrzędną równą *a*. Z kolei jeśli taki punkt należy do wykresu funkcji *f*, to jego drugą współrzędną jest $f(a)$.

Pamiętając o tym, wyznacz współrzędne punktów przecięcia danych prostych z wykresem funkcji *f*, a następnie użyj wzoru na odległość dwóch punktów.

Zadanie 119.

Przy symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych każdy punkt (x, y) przechodzi na punkt $(-x, -y)$. Na przykład punkt $(x, 2x+1)$ przechodzi na punkt $(-x, -2x-1)$. Zauważ, że druga współrzędna takiego punktu zależy od pierwszej współrzędnej. Jak wygląda ta zależność?

2.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 123.

Zauważ, że średnia arytmetyczna liczb oczek w 100 rzutach kostką to średnia ważona liczb 3,75 i 4,25 z wagami równymi odpowiednio 0,4 oraz 0,6.

Zadanie 124.

Zapisz wzorem średnią arytmetyczną dla drugiego zestawu danych. Przekształcaj utworzoną sumę i zauważ wzór na średnią arytmetyczną pierwszego zestawu danych. Przekształć ułamek z wykorzystaniem wzoru na średnią „w drugą stronę”. Zauważ, że nie musisz wykorzystywać wzoru na odchylenie standardowe *s*.

Zadanie 125.

Czwartą ocenę Adama z klasówki oznacz np. przez x. Następnie zapisz odchylenie standardowe otrzymanych ocen:

$$\sigma^2 = \frac{6^2+4^2+4^2+x^2}{4} - \left(\frac{6+4+4+x}{4}\right)^2.$$

Teraz wykorzystaj to, że odchylenie standardowe otrzymanych przez Adama ocen jest równe $\sqrt{\frac{11}{16}}$, i zapisz równanie kwadratowe. Wybierz to rozwiązanie równania, które spełnia warunki zadania.

Zadanie 126.

Zauważ, że suma dwóch liczb naturalnych jest podzielna przez 3, gdy

— pierwsza jest podzielna przez 3 i druga jest podzielna przez 3

albo

— pierwsza przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2,

albo

— pierwsza przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Sprawdź, że wśród liczb 1,2,3,4,5,6,7 są:

— dwie liczby podzielne przez 3,

— trzy liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1,

— dwie liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2.

Sprawdź, że wśród liczb 1,2,3,4,5,6,7,8,9 są:

— trzy liczby podzielne przez 3,

— trzy liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1,

— trzy liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2.

Teraz, stosując regułę mnożenia i regułę dodawania, obliczysz, że szukana liczba par jest równa $2\cdot 3+3\cdot 3+2\cdot 3=21$.

Uwaga: Zadanie możesz rozwiązać za pomocą tabeli o wymiarach 7 x 9, wpisując w każdą kratkę odpowiednią sumę.

Zadanie 127.

Liczby, których nie można uzyskać jako iloczynu dwóch liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 6\}$, można podzielić na kilka kategorii:

1) liczby pierwsze większe od 6: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,

2) wielokrotności liczb pierwszych większych niż 6:

— wielokrotności 7: 14, 21, 28, 35,

— wielokrotności 11: 22, 33,

— wielokrotności 13: 26,

— wielokrotności 17: 34,

3) liczby 27 i 32.

Zatem wszystkich liczb, dla liczb ze zbioru $Z=\{1, 2, 3, ..., 36\}$, których nie można uzyskać jako iloczynu dwóch liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 6\}$, jest 18.

Zadanie 128.

Zauważ, że cyfra 0 nie może występować w rzędzie setek liczby trzycyfrowej. Stąd wynika, że są trzy możliwe pary cyfr setek i jedności: $(1,3)$, $(3,1)$, $(4,0)$; nie może być pary $(0,4)$ oraz pary $(2,2)$. Ile możliwości masz dla cyfry dziesiątek? Cyfrą dziesiątek może być każda z cyfr, które nie zostały jeszcze zapisane. Zastosuj teraz regułę mnożenia do obliczenia, ile jest liczb opisanych w treści zadania.

Zadanie 129.

Rozważ liczby trzycyfrowe, w których zapisie występuje jedna dziewiątka. Na ile sposobów możesz rozmieścić dziewiątkę na trzech miejscach?

Pozostają do uzupełnienia jeszcze dwa miejsca. Na ile sposobów możesz je uzupełnić? W zapisie rozważanych liczb każda cyfra jest inna i nie występuje zero, czyli masz do dyspozycji cyfry: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Z tego wynika, że pierwsze z pozostałych dwóch miejsc możesz uzupełnić na osiem sposobów, a drugie na siedem sposobów.

Zatem liczb spełniających warunki zadania jest $3 \cdot 8 \cdot 7$, czyli 168.

Zadanie 130.

Tabela przedstawiona na rysunku jest wyznaczona przez 7 prostych poziomych i 10 prostych pionowych. Zastanów się, jak można wyznaczyć tabelę o czterech wierszach i czterech kolumnach opisaną w treści zadania.

Prostokątną tabelę o czterech wierszach i czterech kolumnach opisaną w treści zadania można jednoznacznie wyznaczyć na wiele różnych sposobów. W każdym przypadku sprowadza się to do wyboru dwóch prostych, poziomej na 3 sposoby i pionowej na 6 sposobów.

Zadanie 131.

Oblicz liczbę wszystkich liczb pięciocyfrowych. Następnie oblicz liczbę liczb pięciocyfrowych o sumie cyfr równej 3 (możesz wypisać te liczby albo rozpatrywać przypadki). Zastanów się, jak zapisać liczbę 3 w postaci sumy pięciu składników naturalnych. Pamiętaj o poprawnym wykonaniu przybliżenia.

Zadanie 132.

Losujemy jedną przekątną trzynastokąta spośród wszystkich jego przekątnych, więc ile jest równa liczba wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia? W ten sposób otrzymasz moc zbioru zdarzeń elementarnych Ω.

Oznacz literą, np. *A*, zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu takiej przekątnej trzynastokąta, która przecina przekątną A_1A_8 w punkcie leżącym wewnątrz trzynastokąta. Gdzie musi znajdować się jeden, a gdzie drugi koniec takiej przekątnej? Spośród ilu punktów trzeba wybrać jeden, a spośród ilu drugi koniec takiej przekątnej? Ile jest więc tych przekątnych?

W ten sposób obliczysz moc zbioru *A*.

Na koniec oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *A*, korzystając z prawdopodobieństwa klasycznego.

Zadanie 133.

Spośród ośmiu wierzchołków sześcianu wybierz najpierw jeden, a potem z pozostałych — drugi wierzchołek. Na ile sposobów można to zrobić? W ten sposób obliczysz moc zbioru zdarzeń elementarnych Ω.

Niech *X* oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch wierzchołków, które są końcami tej samej przekątnej ściany sześcianu. Zastanów się, ile przekątnych ścian możesz poprowadzić z jednego wierzchołka sześcianu. Mnożąc tę liczbę przez ilość wierzchołków, otrzymasz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *X*.

Teraz już możesz obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia *X*.

Zadanie 134.

Narysuj ostrosłup prawidłowy pięciokątny. Policz, ile ma wszystkich krawędzi. Doświadczenie polega na wylosowaniu jednej krawędzi, a potem drugiej z pozostałych. Jaka jest moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω? Skorzystaj z reguły mnożenia.

Twoim zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane krawędzie będą miały wspólny wierzchołek. W tym celu rozważ dwa przypadki:

1) pierwsza wylosowana krawędź to krawędź boczna,
2) pierwsza wylosowana krawędź to krawędź podstawy.

Spójrz na rysunek i pomyśl: jeśli pierwszą wylosowaną krawędzią jest krawędź boczna (ile ich jest?), to na ile sposobów możesz wylosować drugą krawędź tak, żeby z pierwszą miała wspólny wierzchołek ? Ile będzie wszystkich takich par? Jakie działanie trzeba wykonać, aby to obliczyć?

Teraz rozważ drugi przypadek: jeśli pierwszą wylosowaną krawędzią jest krawędź podstawy, to na ile sposobów możesz wybrać drugą krawędź tak, aby miały wspólny wierzchołek? Ile będzie wszystkich takich par?

Jaka będzie moc zbioru A, skoro zliczaliśmy liczbę jego elementów, rozpatrując dwa rozłączne przypadki? Jakie działanie trzeba wykonać?

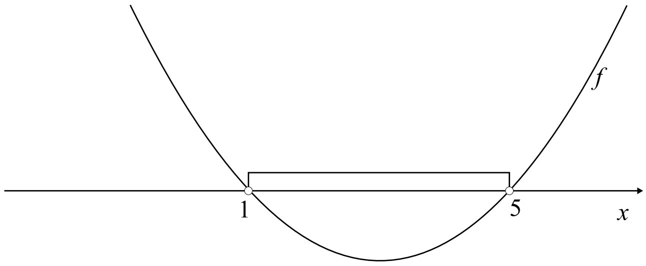
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A; zastosuj definicję klasyczną.

3. Rozwiązania

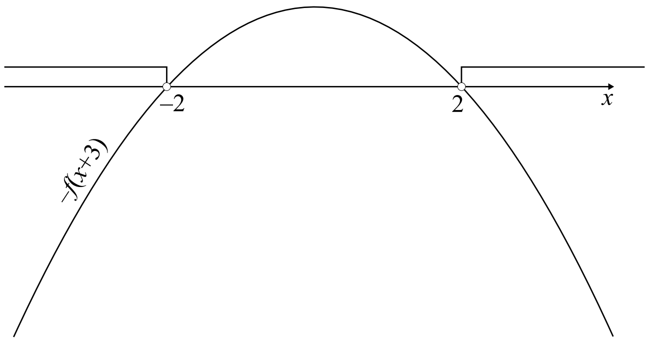
3.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 2.

Z faktu, że rozwiązaniem nierówności $f(x) < 0$ są liczby rzeczywiste z przedziału $(1,5)$, wynika, że parabola ma ramiona skierowane do góry, a miejscami zerowymi funkcji są liczby 1 i 5.



Wykres funkcji kwadratowej f przesuwamy o trzy jednostki w lewo wzdłuż osi *Ox*. Miejscami zerowymi funkcji $f(x+3)$ są $x=-2$ i $x=2$. Przekształcamy wykres funkcji $f(x+3)$ symetrycznie względem osi Ox. To przekształcenie zmienia kierunek ramion paraboli, ale nie zmienia punktów leżących na osi *Ox*, więc liczby $x=-2$ i $x=2$ są miejscami zerowymi funkcji $-f(x+3)$.



Po wykonaniu szkicu zapisujemy rozwiązanie nierówności $-f(x+3) < 0$: $x < -2$ lub $x > 2$.

Zadanie 3.

C

Zadanie 4.

C

Zadanie 5.

D

Zadanie 6.

I sposób

$$\log 72 = \log\left(3^2 \cdot 2^3\right) = \log 3^2 + \log 2^3 = 2\log 3 + 3\log 2 = 2a + 3b$$

II sposób

$$\log 72 = \log(2\cdot 36) = \log 2 + \log 6^2 = \log 2 + 2\log 6 = \log 2 + 2(\log 2 + \log 3) = 3\log 2 + 2\log 3 = 3b + 2a$$

Zadanie 7.

D

Zadanie 8.

D

Zadanie 9.

D

Zadanie 10.

I sposób

Na podstawie podanego oprocentowania w skali roku obliczamy oprocentowanie w okresie 4-miesięcznym: $\frac{4}{12}\cdot 3 = 1$. Niech x oznacza kwotę wpłaconą na lokatę. Stosujemy wzór na procent składany $k_n = k_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, gdzie $k_n = x + 916{,}56$, $k_0 = x$, $n = 2$ i $p = 1$. Po podstawieniu danych otrzymujemy równanie $x + 916{,}56 = x\cdot(1{,}01)^2$ i rozwiązujemy je:

$$x + 916{,}56 = 1{,}0201x,$$

$$0{,}0201x = 916{,}56,$$

stąd

$$x = 45600.$$

II sposób

Na podstawie podanego oprocentowania w skali roku obliczamy oprocentowanie w okresie 4-miesięcznym: $\frac{3}{3} = 1$. Niech x oznacza kwotę wpłaconą na lokatę. Po pierwszym okresie kapitalizacji otrzymujemy $1{,}01x$ oszczędności, a po kolejnym $1{,}01\cdot 1{,}01x = 1{,}0201x$. Po odliczeniu wpłaconej kwoty mamy $0{,}0201x$ odsetek, czyli 916,56. Stąd $x = \frac{916{,}56}{0{,}0201} = 45600$.

III sposób

Oprocentowanie lokaty jest równe 1% przez 2 okresy jej trwania. Niech y oznacza odsetki doliczone po pierwszym okresie trwania lokaty, wtedy odsetki po drugim okresie są równe $y+0{,}01y$, gdyż doliczono odsetki od odsetek. Zatem $y+y+0{,}01y=916{,}56$, czyli $2{,}01y=916{,}56$, a stąd $y=456$. Skoro po pierwszym okresie otrzymano 456 zł odsetek, to oznacza, że wpłacono 45600 zł na lokatę z oprocentowaniem 1% w czasie jej trwania.

Zadanie 11.

I sposób

x — liczba uczniów w szkole na początku pierwszego roku

y — procent, o jaki zmalała liczba uczniów w trzecim roku

Rozważmy diagram przedstawiający sytuację opisaną w zadaniu:

$$\boxed{x} \xrightarrow{-10\%} \boxed{0{,}9x} \xrightarrow{+20\%} \boxed{1{,}2\cdot 0{,}9x=1{,}08x} \xrightarrow{-y\%} \boxed{\left(1-\frac{y}{100}\right)\cdot 1{,}08x}$$

Z tego wynika, że

$$\left(1-\frac{y}{100}\right)\cdot 1{,}08x = x,$$

$$1-\frac{y}{100}=\frac{100}{108},$$

$$\frac{y}{100}=\frac{8}{108},$$

$$y=\frac{800}{108}=7\frac{11}{27}\approx 7{,}4.$$

Odpowiedź: Liczba uczniów szkoły w trzecim roku zmalała o ok. 7,4%.

II sposób

Liczba uczniów w ciągu pierwszego roku zmalała o 10%, zatem na początku drugiego roku stanowiła 90% liczby uczniów z początku pierwszego roku. W drugim roku liczba uczniów wzrosła o 20%, czyli liczba uczniów na początku trzeciego roku stanowiła 108% liczby uczniów z początku pierwszego roku. Jeżeli liczba uczniów na początku pierwszego roku i na końcu trzeciego roku była taka sama, to w trzecim roku liczba uczniów zmalała o 8 punktów procentowych.

Obliczamy, o ile procent zmalała liczba uczniów w trzecim roku:

$$\frac{8}{108}\cdot 100\% = 7\frac{11}{27}\% \approx 7{,}4\%.$$

Odpowiedź: Liczba uczniów szkoły w trzecim roku zmalała o ok. 7,4%.

Zadanie 12.

Ponumerujmy autobusy kolejnymi liczbami 1, 2,..., 10 według liczby pasażerów nimi podróżujących i oznaczmy liczbę pasażerów w i-tym pojeździe przez p_i, więc $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k \geq 50 > p_{k+1} \geq \ldots \geq p_9 \geq p_{10}$, gdzie k to liczba autobusów przepełnionych.

Zapiszmy różnicę $\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_{10}} - \frac{k}{10}$ w postaci:

$$\frac{(10-k)(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) - k(p_{k+1} + \ldots + p_{10})}{10(p_1 + p_2 + \ldots + p_{10})}.$$

Zauważmy, że $(10-k)(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) \geq 50(10-k)k$, gdyż każda z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jest większa lub równa 50.

Zauważmy, że $k(p_{k+1} + \ldots + p_{10}) < 50k(10-k)$, gdyż każda z liczb $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_{10}$ jest mniejsza od 50.

Zatem $(10-k)(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) - k(p_{k+1} + \ldots + p_{10}) > 0$, co oznacza, że kontroler sprawdzający procent pasażerów podróżujących w przepełnionych autobusach otrzyma większa liczbę.

Zadanie 13.

$$a = 3\log_3 2 - \log_3 16 = \log_3 8 - \log_3 16 = \log_3 \frac{8}{16} = \log_3 \frac{1}{2},$$

$$b = 2\log_3 6 - \log_3 18 = \log_3 36 - \log_3 18 = \log_3 \frac{36}{18} = \log_3 2.$$

Zatem $a + b = \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 2 = \log_3\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = \log_3 1 = 0$.

Zadanie 14.

I sposób

Przekształcamy równoważnie wyrażenie:

$$\log_{3x}\left(3x^2\right) + \log_{3x}(9x) = \log_{3x}\left(3x^2 \cdot 9x\right) = \log_{3x}\left(27x^3\right) = \log_{3x}(3x)^3 = 3 > 2,$$

co kończy dowód.

II sposób

Przekształcamy równoważnie wyrażenie:

$$\begin{aligned}\log_{3x}\left(3x^2\right) + \log_{3x}(9x) &= \log_{3x} 3 + \log_{3x} x^2 + \log_{3x} 3^2 + \log_{3x} x = \\ &= \log_{3x} 3 + 2\log_{3x} x + 2\log_{3x} 3 + \log_{3x} x = 3\log_{3x} x + 3\log_{3x} 3 = \\ &= 3\left(\log_{3x} x + \log_{3x} 3\right) = 3\log_{3x}(3x) = 3 > 2,\end{aligned}$$

co kończy dowód.

III sposób

Zapiszemy nierówność wynikającą z treści zadania: $\log_{3x}\left(3x^2\right) + \log_{3x}(9x) > 2$.

Przekształcamy tę nierówność równoważnie:

$$\frac{1}{2}\log_{3x}\left(3x^2\right)+\frac{1}{2}\log_{3x}\left(9x\right)>1,$$

$$\log_{3x}\left(3x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\log_{3x}\left(9x\right)^{\frac{1}{2}}>1,$$

$$\log_{3x}\left(\sqrt{3}x\right)+\log_{3x}\left(3\sqrt{x}\right)>1,$$

$$\log_{3x}\left(3\sqrt{3}\cdot x\sqrt{x}\right)>1,$$

$$\log_{3x}\left(3x\right)^{\frac{3}{2}}>1,$$

$$\frac{3}{2}>1,$$

co kończy dowód.

Zadanie 15.
A

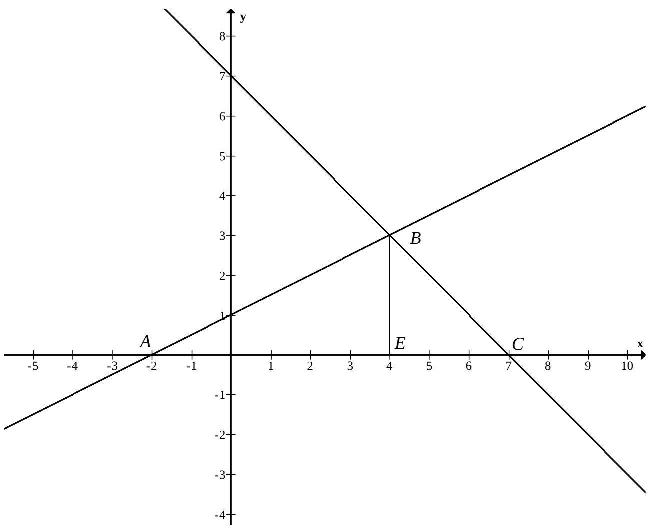
Zadanie 16.

Zauważmy, że prosta $y=\frac{1}{2}x+1$ przecina oś Ox, czyli prostą $y=0$ w punkcie o współrzędnych $(-2,0)$ oraz prosta $y=7-x$ przecina prostą $y=0$ w punkcie o współrzędnych $(7,0)$.

Wyznaczmy współrzędne punktu przecięcia prostych: $y=\frac{1}{2}x+1$ oraz $y=7-x$.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$



Sporządźmy odpowiedni rysunek.

Pole trójkąta jest równe

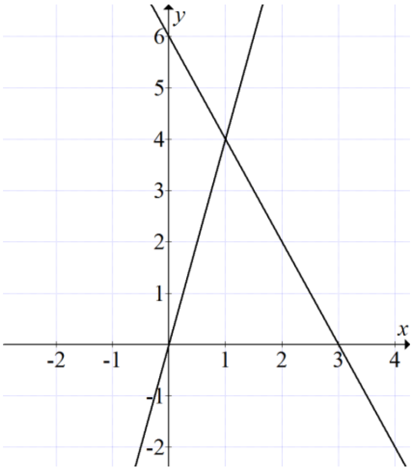
$$P=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BE|.$$

Tak więc $P=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=13\frac{1}{2}$.

Zadanie 17.

Przekształcamy równania do postaci kierunkowej i wykorzystujemy interpretację geometryczną układów równań: $\begin{cases} y=-4x-2 \\ y=-a^2x-b \end{cases}$, $\begin{cases} y=-4x+2 \\ y=-b^2x-a \end{cases}$. Układ jest sprzeczny, gdy proste o tych równaniach są równoległe, ale nie pokrywają się, stąd ($a^2=4$ i $b\neq 2$), czyli ($a=2$ lub $a=-2$) i $b\neq 2$. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy proste o tych równaniach się pokrywają, tzn. ($b^2=4$ i $a=-2$), więc ($b=2$ lub $b=-2$) i $a=-2$. Ostatecznie otrzymujemy, że $a=-2$ i $b=-2$.

Zadanie 18.



Prosta o równaniu $y=-2x+6$ przechodzi w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych tylko przez dwa punkty kratowe: $(1,\,4)$ i $(2,\,2)$, przy czym drugi z nich ma równe współrzędne. Rozwiązaniem układu równań jest para $(1,\,4)$. Prosta postaci $y=ax$ przechodzi przez punkt $A=(1,\,4)$, stąd $a=4$. Szukane równanie to $y=4x$.

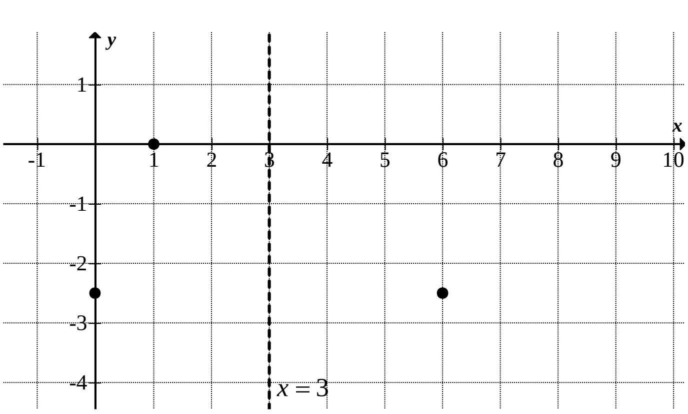
Zadanie 19.

A

Zadanie 20.

Punkty $\left(0,-2\frac{1}{2}\right)$ oraz $\left(6,-2\frac{1}{2}\right)$ leżą na paraboli, więc prosta $x=3$ jest jej osią symetrii.

Miejscami zerowymi funkcji f są $x=1$, $x=5$, a ramiona paraboli są skierowane w dół.



Rozwiązaniem nierówności $f(x)\geq 0$ są liczby z przedziału $\langle 1,\,5\rangle$.

Zadanie 21.

Przyjmijmy oznaczenia:

x — długość dłuższego boku prostokąta,

$x-5$ — długość krótszego boku prostokąta.

Ponieważ długość boku ma wartość dodatnią, to $x \in (5;+\infty)$.

Pole prostokąta jest mniejsze od 24, zatem

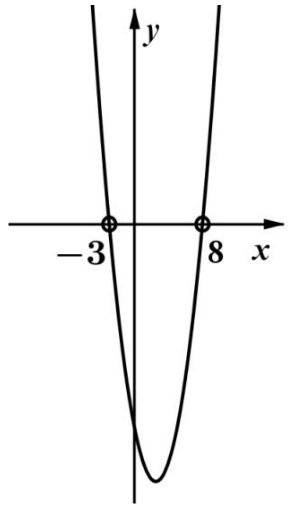
$$x(x-5) < 24.$$

Przekształcamy nierówność tak, aby po jednej stronie występowała liczba 0:

$$x^2 - 5x - 24 < 0.$$

Rozwiązujemy nierówność w zbiorze $(5;+\infty)$.

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = x^2 - 5x - 24$: $x_1 = -3$, $x_2 = 8$ i szkicujemy fragment jej wykresu.



Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności kwadratowej: $x \in (-3;8)$.

Uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy warunek: $x \in (5;8)$.

Z treści zadania wynika, że długość dłuższego boku prostokąta jest liczbą parzystą, zatem $x = 6$.

Odpowiedź: Długość dłuższego boku prostokąta jest równa 6.

Zadanie 22.

C

Zadanie 23.

Zapisujemy polecenie zadania w postaci równania

$$\frac{1}{x+1} + x + 1 = 2,$$

które następnie przekształcamy:

$$\frac{1}{x+1} = 2 - x - 1,$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x,$$

$$1 = (x+1)(1-x).$$

Stąd otrzymujemy $x^2 = 0$ czyli $x = 0$.

Zadanie 24.

I sposób

Wprowadzamy oznaczenia:

w — wydajność godzinowa II pompy (wyrażająca część objętości basenu),

$1{,}2w$ — wydajność godzinowa I pompy.

Zapisujemy zależności w postaci równania, z wykorzystaniem danych dotyczących czasu napełniania basenu przez każdą z pomp:

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{1{,}2w}+1\frac{2}{3}.$$

Przekształcamy do równania postaci: $1{,}2=1+\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}w$. Wyznaczamy $w=0{,}1$ [objętości basenu].

Zatem wydajność I pompy jest równa $1{,}2w=1{,}2\cdot 0{,}1=0{,}12$ [objętości basenu].

Obliczamy, jaką część pustego basenu napełnią w ciągu jednej godziny obie pompy, pracując jednocześnie:

$$0{,}12+0{,}1=0{,}22.$$

Obie pompy, pracując jednocześnie, napełnią $0{,}22$ objętości basenu.

II sposób

Wprowadzamy oznaczenia:

t — czas napełniania zbiornika tylko I pompą,

$t+1\frac{2}{3}$ — czas napełniania zbiornika tylko II pompą.

Zapisujemy zależności w postaci równania, z wykorzystaniem danych dotyczących wydajności napełniania basenu przez każdą z pomp:

$$\frac{1}{t}=1{,}2\cdot\frac{1}{t+1\frac{2}{3}},$$

zatem

$$\frac{1}{t}=\frac{1{,}2}{t+1\frac{2}{3}}.$$

Przekształcamy do równania postaci:

$$1{,}2t=t+\frac{5}{3}.$$

Wyznaczamy

$$t=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}\text{ godziny.}$$

Otrzymujemy

$$t+1\frac{2}{3}=8\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}=10 \text{ godzin.}$$

Czas napełniania basenu tylko I pompą jest równy $\frac{25}{3}$ godziny, zatem w ciągu jednej godziny pompa ta napełni $\frac{3}{25}$ objętości basenu.

Czas napełniania basenu tylko II pompą jest równy 10 godzin, zatem w ciągu jednej godziny pompa ta napełni $\frac{1}{10}$ objętości basenu.

Obliczamy, jaką część pustego basenu napełnią w ciągu jednej godziny obie pompy, pracując jednocześnie:

$$\frac{3}{25}+\frac{1}{10}=\frac{6+5}{50}=\frac{11}{50}=0{,}22.$$

Obie pompy, pracując jednocześnie, napełnią $0{,}22$ objętości basenu.

Zadanie 25.

D

Zadanie 26.

B

Zadanie 27.

C

3.2. Funkcje

Zadanie 29.

Obliczmy wyróżnik i miejsca zerowe funkcji *f* określonej wzorem $f\left(x\right)=-x^2+6x-5$:

$$\Delta=6^2-4\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-5\right)=16,\ \sqrt{\Delta}=4,$$

$$x_1=\frac{-6-4}{2\cdot\left(-1\right)}=5, \qquad x_2=\frac{-6+4}{2\cdot\left(-1\right)}=1.$$

Ponieważ mniejsze z miejsc zerowych funkcji *f* to także miejsce zerowe funkcji *g*, więc tym miejscem zerowym jest liczba 1.

Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, to punkt *W* o współrzędnych

$$x_W=\frac{-6}{2\cdot\left(-1\right)}=3 \quad \text{oraz} \quad y_W=\frac{-16}{4\cdot\left(-1\right)}=4.$$

Ponieważ wierzchołek Z paraboli, która jest wykresem funkcji g, leży na osi Oy układu współrzędnych, to oś Oy układu współrzędnych jest osią symetrii tej paraboli. Wzór funkcji g ma więc postać

$$g(x)=ax^2+c\,.$$

Punkt $W=(3,4)$ leży na wykresie funkcji g, więc $g(3)=4$, czyli

$$4=a\cdot 3^2+c\,.$$

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji g, więc $g(1)=0$, czyli

$$0=a\cdot 1^2+c\,.$$

Stąd $c=-a$. Zatem równanie $4=a\cdot 3^2+c$ możemy zapisać w postaci $4=a\cdot 3^2-a$, skąd otrzymujemy $a=\frac{1}{2}$, a dalej $c=-a=-\frac{1}{2}$.

Wzór funkcji g ma zatem postać $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

Uwaga

Wiedząc, że jednym z miejsc zerowych funkcji g jest liczba 1 i że oś Oy układu współrzędnych jest osią symetrii tej paraboli, możemy zapisać wzór funkcji g w postaci

$$g(x)=a(x+1)(x-1)\,.$$

Punkt $W=(3,4)$ leży na wykresie funkcji g, więc $g(3)=4$, czyli

$$4=a\cdot(3+1)(3-1)\,,$$

$$4=8a\,,$$

$$a=\frac{1}{2}\,.$$

Wzór funkcji g ma zatem postać $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$.

Zadanie 30.

Wprowadzamy oznaczenia: (p,q) — współrzędne wierzchołka paraboli.

Obliczamy p: $p=\frac{2}{-1}=-2$.

Ponieważ $p\in\langle -3,k\rangle$, to największą wartością funkcji f jest $f(-2)=8$.

Najmniejszą wartością, jaką funkcja f przyjmuje w tym przedziale, jest liczba $8-4\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$.

Wyznaczamy argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą $3\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2}x^2-2x+6=3\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}x^2-2x+2\frac{1}{2}=0,$$

$$\Delta=4+5=9,\quad x_1=\frac{2-3}{-1}=1,\quad x_2=\frac{2+3}{-1}=-5.$$

Liczba $x_2=-5$ nie spełnia warunków zadania.

Odpowiedź: $k=1$.

Zadanie 31.

A

Zadanie 32.

Zbadajmy zbiór wartości funkcji $g(x)=x^2+4x-1$ w przedziale $\langle 1,3\rangle$.

Funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą w punkcie $x=-2$, lecz $-2\notin\langle 1,3\rangle$. Zauważmy, że funkcja g jest rosnąca w przedziale $\langle -2,+\infty)$. Zatem funkcja g ma wartość najmniejszą w punkcie $x=1$ i jest ona równa $g(1)=4$. Wobec faktu, że funkcja g w przedziale $\langle 1,3\rangle$ jest rosnąca i przyjmuje tylko wartości dodatnie, funkcja *f* przyjmuje wartość największą w takim punkcie, w jakim funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą.

Odpowiedź: Największa wartość funkcji jest równa $\frac{1}{4}$.

Zadanie 33.

Wyznaczamy wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x)=-x^2+6x+5$ w przedziale $\langle -1;5\rangle$.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka wykresu funkcji *f*:

$$p=\frac{-6}{2\cdot(-1)}=3.$$

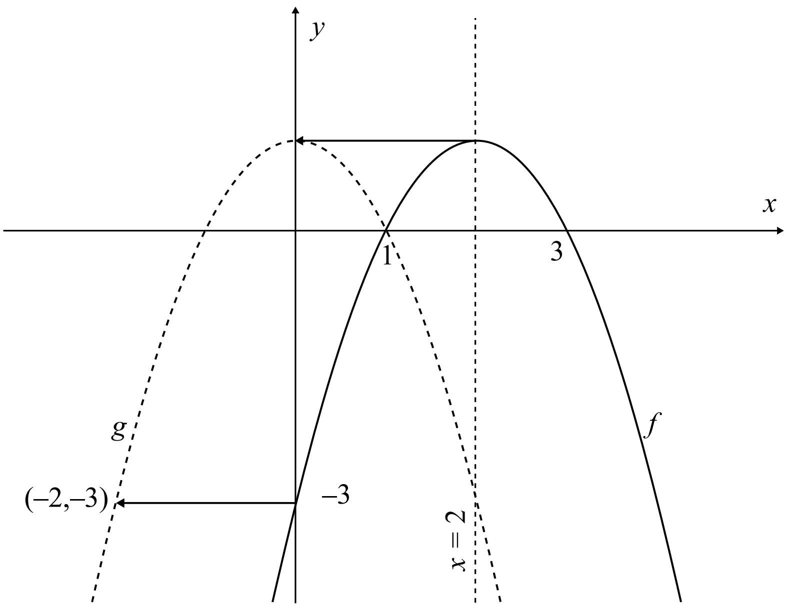
Skoro więc $p\in\langle -1;5\rangle$ oraz współczynnik przy x^2 jest ujemny, to funkcja f przyjmuje wartość największą dla $x=3$. Ponieważ $f(-1)=-2$ oraz $f(5)=10$, to funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=-1$.

Ponieważ $f(3)=14$, $f(-1)=-2$, to zbiorem wszystkich wartości funkcji f jest przedział $\langle -2;14\rangle$.

Zadanie 34.

I sposób

Osią symetrii paraboli jest prosta $x=2$. Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(2,q)$. Przesuwamy parabolę o 2 jednostki w lewo (wzdłuż osi Ox), tak żeby wierzchołek paraboli leżał na osi Oy.



Miejscami zerowymi funkcji g są $x=-1$ oraz $x=1$.

Zapisujemy wzór funkcji g w postaci iloczynowej $g(x)=a(x+1)(x-1)$.

Punkt $(-2,-3)$ należy do wykresu funkcji g, więc otrzymujemy $-3=a(-2+1)(-2-1)$, stąd $a=-1$.

Ostatecznie otrzymujemy $g(x)=-1(x+1)(x-1)=-x^2+1$.

II sposób

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 1 oraz 3, więc zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej: $f(x)=a(x-1)(x-3)$, a następnie wykorzystujemy informację, że $f(0)=-3$, czyli $-3=a(0-1)(0-3)$, stąd $a=-1$.

Otrzymaliśmy wzór funkcji f: $f(x)=-1(x-1)(x-3)$.

Osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f, jest prosta $x=2$ i na niej leży wierzchołek paraboli. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji g, leży na osi Oy, stąd wnioskujemy, że wykonano przesunięcie wykresu funkcji f o dwie jednostki w lewo (wzdłuż osi Ox). Stąd otrzymujemy $g(x)=f(x+2)$.

Wyznaczamy wzór funkcji g:

$$g(x)=f(x+2)=-1(x+2-1)(x+2-3)=-(x+1)(x-1)=-x^2+1.$$

Zadanie 35.

I sposób

Jeżeli funkcja kwadratowa przyjmuje wartość 0 dla $x=-1$ i $x=3$, to liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji *f*. Zatem wzór funkcji można zapisać w postaci: $f(x)=a(x-3)(x+1)$.

Ponieważ wykres funkcji *f* przechodzi przez punkt $(-2,10)$, to $f(-2)=10$. Zatem spełniony jest warunek:

$$f(-2)=a(-2-3)(-2+1)=10,$$
$$5a=10,$$
$$a=2.$$

Wzór funkcji *f* ma więc postać: $f(x)=2(x-3)(x+1)$.

Niech punkt o współrzędnych (p,q) będzie wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji *f*. Ponieważ pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych funkcji *f*, to $p=\frac{3+(-1)}{2}=1$. Zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa: $q=f(1)=2(1-3)(1+1)=-8$.

Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, jest punkt o współrzędnych $(1,-8)$.

Odległość wierzchołka paraboli od punktu $(0,0)$ jest więc równa:

$$\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}.$$

Odpowiedź: Odległość wierzchołka paraboli od punktu $(0,0)$ jest równa $\sqrt{65}$.

II sposób

Jeżeli liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji *f*, to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych funkcji *f*, więc $p=1$. Niech punkt o współrzędnych (p,q) będzie wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji *f*. Ponieważ $p=1$, to wzór funkcji *f* można zapisać w postaci: $f(x)=a(x-1)^2+q$.

Wykres funkcji *f* przechodzi przez punkt $(-2,10)$, więc $f(-2)=10$ i $f(3)=0$. Zatem spełnione są warunki:

$$\begin{cases} 10=a(-2-1)^2+q \\ 0=a(3-1)^2+q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10=9a+q \\ 0=4a+q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = 9a - 4a \\ -4a = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ q = -8 \end{cases}$$

Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, jest punkt o współrzędnych $(1,-8)$.

Odległość wierzchołka paraboli od punktu $(0, 0)$ jest więc równa:

$$\sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}\ .$$

Odpowiedź: Odległość wierzchołka paraboli od punktu $(0, 0)$ jest równa $\sqrt{65}$.

Zadanie 36.

I sposób

Jeżeli wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, leży na prostej $y=-5$, to druga współrzędna wierzchołka jest równa: $q=-5$.

Korzystając ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli, otrzymujemy:

$$-\frac{16-4a}{4a} = -5,\ a \neq 0.$$

Przekształcając tę równość w sposób równoważny, otrzymujemy $a=\frac{2}{3}$.

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f opisanej wzorem $f(x)=\frac{2}{3}x^2+4x+1$, jest równa: $p=\frac{-4}{2\cdot\frac{2}{3}}=-4\cdot\frac{3}{4}=-3$.

Zatem wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, ma współrzędne $(-3,-5)$.

II sposób

Jeżeli wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, leży na prostej o równaniu $y=-5$, to druga współrzędna wierzchołka jest równa: $q=-5$.

Korzystając ze wzoru na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, otrzymujemy:

$$p=-\frac{4}{2a}=-\frac{2}{a}.$$

Korzystając z zależności $f(p)=q$, otrzymujemy równość:

$$a\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)+1=-5.$$

Przekształcając tę równość w sposób równoważny, otrzymujemy $a=\frac{2}{3}$.

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f, jest równa

$$p=\frac{-4}{2\cdot\frac{2}{3}}=-4\cdot\frac{3}{4}=-3.$$

Zatem wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, ma współrzędne $(-3,-5)$.

Zadanie 37.

B

Zadanie 38.

Zauważmy, że punkt o współrzędnych $(2,-4)$ jest wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji *f*. Jeśli $a<0$, to $f(x)\le f(2)=-4<12$ dla każdej liczby rzeczywistej x, co przeczy założeniom zadania. Wobec tego $a>0$. Na półprostej $(-\infty,2)$ funkcja $a(x-2)^2-4$ maleje, więc jeśli $-4\le x\le -2$, to $f(-4)\ge f(x)\ge f(-2)$. Wobec tego największą wartością funkcji f na przedziale $\langle -4,-2\rangle$ jest liczba $f(-4)$. Z drugiej strony największą wartością tej funkcji na tym przedziale jest liczba 12. Stąd wynika, że

$$12=f(-4)=a(-4-2)^2-4=36a-4.$$

Zatem $a=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$. Najmniejszą wartością funkcji *f* na przedziale $\langle -4,-2\rangle$ jest liczba

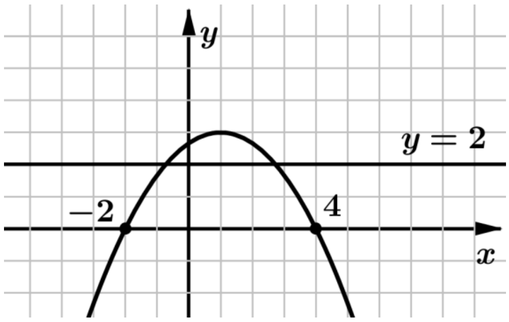
$$f(-2)=\frac{4}{9}\cdot 16-4=\frac{28}{9}.$$

Zadanie 39.

I sposób

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -2 i 4, zatem pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f, jest równa średniej arytmetycznej miejsc zerowych: $\frac{-2+4}{2}=1$. Z treści zadania wynika, że $f(1)=3$, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa 3. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe oraz wierzchołek paraboli leży powyżej osi Ox, zatem parabola ma ramiona skierowane do dołu. Prosta $y=2$ jest równoległa do osi Ox i leży poniżej wierzchołka paraboli skierowanej ramionami do dołu, zatem przecina wykres funkcji f w dwóch punktach symetrycznych względem prostej $x=1$. Co kończy uzasadnienie.

Uwaga: Sytuację można przedstawić graficznie.



II sposób

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -2 i 4, zatem $f(x)=a(x+2)(x-4)$.

Obliczamy współczynnik a, korzystając z informacji, że $f(1)=3$: $a=-\frac{1}{3}$.

Z tego wynika, że $f(x)=-\frac{1}{3}(x+2)(x-4)$.

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej: $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$.

Wykres funkcji f ma dwa punkty wspólne z prostą $y=2$, gdy równanie $-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=2$ ma dwa rozwiązania. Równanie $-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=2$ przekształcamy równoważnie: $x^2-2x-2=0$. Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania, jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego jest większy od zera. Obliczamy wyróżnik równania $x^2-2x-2=0$: $\Delta=4-4\cdot(-2)=12>0$. Ponieważ $-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=2$ ma dwa rozwiązania, to wykres funkcji f ma dwa punkty wspólne z prostą $y=2$. Co kończy uzasadnienie.

Uwaga

Z treści zadania wynika, że

$$\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(4)=0 \\ f(1)=3 \end{cases}$$

zatem wzór funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$ można wyznaczyć, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 4a-2b+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$$

Zadanie 40.

Zapisujemy wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-1)^2+4$.

Wierzchołek $C=(1,4)$, więc wysokość trójkąta *ABC* jest równa 4.

Długość odcinka *AB* jest równa 4.

Prosta $x=1$ jest osią symetrii trójkąta *ABC*, więc punkty *A* i *B* leżą w odległości 2 od tej prostej. Stąd $A=(-1,0)$, $B=(3,0)$.

Wykorzystujemy współrzędne punktu *A* lub *B* do wyznaczenia współczynnika *a* we wzorze funkcji *f*:

$$0=a(-1-1)^2+4,$$

stąd $a=-1$.

Zapisujemy wzór funkcji *f*:

$$f(x)=-(x-1)^2+4.$$

Zadanie 41.

Pierwsze dwa odcinki łamanej mają długość 1, następne dwa długość 2, kolejne dwa długość 3, itd. Niech $f(n)$ oznacza długość łamanej składającej się z 2*n* odcinków, czyli takiej, której początkiem jest punkt A_1 i końcem punkt A_{2n+1}. Zatem

$$f(n)=(1+1)+(2+2)+(3+3)+\ldots+(n+n)=2(1+2+3+\ldots+n).$$

Sumę $1+2+3+\ldots+n$ kolejnych *n* liczb całkowitych dodatnich możemy obliczyć, wykorzystując wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Stąd otrzymujemy wzór

$$f(n)=2\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=n(n+1) \text{ dla } n\geq 1.$$

Dla $n=33$ wartość funkcji *f* jest równa $f(33)=33(33+1)=1122$.

Zadanie 42.

B

Zadanie 43.

Z jedynki trygonometrycznej obliczamy, że $\cos^2 72°=1-a^2$, a następnie przekształcamy podane wyrażenie: $1+\mathrm{tg}^2 72° = 1+\dfrac{\sin^2 72°}{\cos^2 72°}=\dfrac{\cos^2 72°+\sin^2 72°}{\cos^2 72°}=\dfrac{1}{1-a^2}$.

Zadanie 44.

I sposób

Wykorzystujemy zależność $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3,$$

$$\sin\alpha=3\cos\alpha.$$

Obliczamy wartość wyrażenia

$$\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{3\cos\alpha-5\sin\alpha}=\frac{6\cos\alpha-3\cos\alpha}{3\cos\alpha-15\cos\alpha}=\frac{3\cos\alpha}{-12\cos\alpha}=-\frac{1}{4}.$$

II sposób

Dzielimy licznik i mianownik wyrażenia $\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha - 5\sin\alpha}$ przez $\cos\alpha$:

$$\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha - 5\sin\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{3\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - 5\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha - 3}{3 - 5\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\cdot 3 - 3}{3 - 5\cdot 3} = \frac{3}{-12} = -\frac{1}{4}.$$

Zadanie 45.

I sposób

Mamy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin\beta = \cos\alpha$, więc $\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej mamy:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1, \quad \text{czyli} \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{25}}.$$

Ponieważ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Zatem $\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

II sposób

W trójkącie prostokątnym przyjmijmy oznaczenia:

a, b — długości przyprostokątnych, *c* — długość przeciwprostokątnej. Niech α będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości *a,* zaś β — kątem leżącym naprzeciwko boku o długości *b*. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$ oraz

$\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \sin\alpha$. Zatem otrzymujemy $\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \sin\alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej mamy $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$, czyli $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{25}}$.

Ponieważ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Zatem $\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Zadanie 46.

Korzystając ze wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymujemy:

$$\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{4}\right)^2 = 1,$$

czyli

$$a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}+a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}=1.$$

Wobec tego $a^2=\frac{7}{16}$, czyli $a=\frac{\sqrt{7}}{4}$ lub $a=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Ponieważ $\sin\alpha>0$ i $\cos\alpha>0$, to $a=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Z tożsamości trygonometrycznej wynika:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}=\frac{8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}.$$

Zadanie 47.

Wyznaczmy sinus kąta α, gdzie α jest kątem ostrym:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Wtedy tangens kąta α jest równy $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}:\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Wyznaczmy średnią arytmetyczną danych liczb:

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}{3}=\frac{2\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{6\cdot 3}=\frac{\sqrt{5}+1}{6}.$$

Zadanie 48.

Z równości $\sin\alpha=\frac{\sqrt{35}}{6}$ i z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{35}{36}}=\frac{1}{6}.$$

Zatem

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{35}}{6}}{\frac{1}{6}}=\sqrt{35};$$

$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta$ i z założenia, że oba kąty α i β są ostre, wynika, że $\alpha=\beta$.

Zadanie 49.

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-6}=2$$

dla *x* należących do dziedziny funkcji wymiernej *f*.

Przekształcamy do postaci równoważnej:

$$x^2+2x-3=2x^2-6x-12,$$

$$x^2-8x-9=0.$$

Rozwiązaniami tego równania kwadratowego są liczby –1 oraz 9. Obie te liczby należą do dziedziny funkcji *f*, gdyż $x^2-3x-6\neq 0$, gdy $x=-1$ lub $x=9$.

Odpowiedź: $f(x)=2$, gdy $x=-1$ lub $x=9$.

Zadanie 50.

Niech x_w oznacza pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej *f*. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że jeśli *f* przyjmuje w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ najmniejszą wartość równą $f(2)$, a więc dla argumentu nie będącego końcem przedziału, to $x=2$ musi być pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, a ramiona paraboli są skierowane w górę. Oznacza to, że $a>0$; teraz korzystamy ze wzoru na pierwszą współrzędną wierzchołka: $2=-\frac{b}{2a}$, czyli $b=-4a$, z czego wnioskujemy, że $b<0$.

Zadanie 51.

Jeśli funkcja kwadratowa *f* przyjmuje tę samą wartość dla dwóch różnych argumentów, to są one na osi *Ox* symetryczne względem osi symetrii wykresu; osią symetrii funkcji *f* jest zatem prosta $x=1{,}5$.

Argumenty –2 i 5 są na osi *Ox* także symetryczne względem prostej $x=1{,}5$, zatem $f(-2)=f(5)$ i jest to wartość największa w przedziale $\langle -2, 5\rangle$, gdyż z faktu, że $f(0)=f(3)>f(1{,}5)$ wynika, iż ramiona wykresu funkcji *f* są skierowane w górę.

3.3. Ciągi

Zadanie 53.

Niech *q* będzie ilorazem ciągu (a_n). Z własności ciągu geometrycznego mamy $a_4=a_1q^3$.

Z warunków zadania mamy $8a_1=a_1q^3$ (zauważmy, że z faktu, że $a_2\neq 0$ wynika, że $a_1\neq 0$ oraz $q\neq 0$), skąd otrzymujemy $q=2$. Ponadto wiemy, że $a_2=a_1q$, czyli $6=a_1\cdot 2$, skąd mamy $a_1=3$.

W rezultacie mamy $a_k=a_1q^{k-1}=3\cdot 2^{k-1}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej *k*. Kiedy $a_k>100$, czyli kiedy $3\cdot 2^{k-1}>100$? Sprawdzamy kolejne potęgi liczby 2:

— gdy $k=1$, $3\cdot 2^0<100$,

— gdy $k=2$, $3\cdot 2^1<100$,

— gdy $k=3$, $3\cdot 2^2<100$,

— gdy $k=4$, $3\cdot 2^3<100$,

— gdy $k=5$, $3\cdot 2^4<100$,

— gdy $k=6$, $3\cdot 2^5<100$,

— gdy $k=7$, $3\cdot 2^6>100$.

Tak więc najmniejszą liczbą naturalną *k* taką, że $a_k>100$, jest 7.

Zadanie 54.

A

Zadanie 55.

B

Zadanie 56.

Wyznaczmy ósmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n):

$$a_8=S_8-S_7=\frac{64-200}{4}-\frac{49-175}{4}=-34+31\frac{1}{2}=-2\frac{1}{2}.$$

Wyznaczmy teraz wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego (b_n):

$$b_1=b_5-4r,$$

$$b_1=8-6=2.$$

Tak więc $b_n=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$.

Z powyższego $c_n=3n+1+2\frac{1}{2}=3n+3\frac{1}{2}$.

Wyznaczmy sumę 17 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (c_n):

$$S_{17}=\frac{c_1+c_{17}}{2}\cdot 17=\frac{6\frac{1}{2}+54\frac{1}{2}}{2}\cdot 17=\frac{61\cdot 17}{2}=\frac{1037}{2}=518\frac{1}{2}.$$

Zadanie 57.

Stosując wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy kolejno:

$$1564=\frac{(a_1+a_{23})\cdot 23}{2},$$

$$\frac{1564\cdot 2}{23}=a_1+a_{23},$$

$$a_1+a_{23}=136.$$

Stosując wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego, otrzymujemy:

$$a_3+a_{21}=a_1+2r+a_1+20r=a_1+(a_1+22r)=a_1+a_{23}.$$

Zatem średnia arytmetyczna wyrazów a_3 i a_{21} jest równa

$$\frac{a_3+a_{21}}{2}=\frac{a_1+a_{23}}{2}=\frac{136}{2}=68.$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna wyrazów a_3 i a_{21} jest równa 68.

Zadanie 58.

I sposób

Aby wykazać, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, wykażemy, że istnieje liczba r_1 taka, że dla każdego $n\geq 1$ prawdziwa jest równość $b_n=b_1+(n-1)r_1$.

Oznaczmy przez *r* różnicę ciągu arytmetycznego (a_n). Wtedy

$$a_{n+2}=a_1+(n+1)r,\ a_{n+4}=a_1+(n+3)r.$$

Stąd

$$b_n=2a_{n+2}+4a_{n+4}=2a_1+2(n+1)r+4a_1+4(n+3)r=6a_1+(6n+14)r=$$
$$=6a_1+20r+(n-1)6r.$$

Ciąg (b_n) jest więc ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $b_1=6a_1+20r$ oraz różnicy równej $6r$.

Uwaga: Można też zapisać, że

$$b_n=6a_1+(6n+14)r,\ b_{n+1}=6a_1+(6n+20)r,$$

i sprawdzić, że dla każdego $n\geq 1$ prawdziwa jest równość $b_{n+1}-b_n=6r$.

II sposób

Aby wykazać, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, wykażemy, że istnieje liczba r_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość

$$b_{n+1} - b_n = r_1 .$$

Oznaczmy przez r różnicę ciągu (a_n). Dla $n \geq 1$ mamy

$$b_{n+1} - b_n = 2a_{n+3} + 4a_{n+5} - (2a_{n+2} + 4a_{n+4}) = 2(a_{n+3} - a_{n+2}) + 4(a_{n+5} - a_{n+4}) = 2r + 4r = 6r ,$$

czyli ciąg (b_n) jest arytmetyczny o różnicy $6r$.

Zadanie 59.

I sposób

Przyjmijmy, że ciąg (a_n) ma $2n-1$ wyrazów, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, wtedy wyrazem środkowym jest a_n. Niech r oznacza różnicę tego ciągu. Pokażemy, że $a_n | S_{2n-1}$ (tzn., że a_n jest dzielnikiem S_{2n-1}). Obliczamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_{2n-1} = \frac{2a_1 + (2n-2)r}{2}(2n-1) = (a_1 + (n-1)r)(2n-1) = a_n(2n-1).$$

Ponieważ liczba $2n-1$ jest całkowita, to S_{2n-1} jest wielokrotnością a_n, czyli $a_n | S_{2n-1}$.

II sposób

Przyjmijmy, że ciąg ma $2n+1$ wyrazów, gdzie n jest liczbą całkowitą nieujemną i oznaczmy wyraz środkowy przez x. Niech r oznacza różnicę tego ciągu. Wtedy jest n wyrazów przed wyrazem x i n wyrazów po wyrazie x. Ciąg możemy zapisać w postaci

$$(x - nr, ..., x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r, ..., x + nr).$$

Obliczamy sumę

$$S_{2n+1} = x - nr + ... + x - 2r + x - r + x + x + r + x + 2r + ... + x + nr = (2n+1)x .$$

Ponieważ liczba $2n+1$ jest całkowita, to S_{2n+1} jest wielokrotnością a_n, czyli $a_n | S_{2n+1}$.

Zadanie 60.

B

Zadanie 61.

Korzystając ze wzoru ogólnego wyrazu ciągu geometrycznego, mamy: $16 = q^{k-1}$ i $32 = q^{k+1}$. Z tego wynika, że $2 = q^2$, czyli $q = \sqrt{2}$ lub $q = -\sqrt{2}$.

Zatem $a_{10} = 16\sqrt{2}$ lub $a_{10} = -16\sqrt{2}$.

Zadanie 62.

Sytuacja przedstawiona w zadaniu odpowiada ciągowi geometrycznemu, w którym iloraz $q = 0{,}8$ oraz $a_5 = 20{,}48$.

Ponieważ $a_5 = a_1 \cdot q^4$, otrzymujemy równanie:

$$a_1 \cdot 0{,}8^4 = 20{,}48,$$

$$a_1 = 50.$$

Obliczamy sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu:

$$S_5 = 50\frac{1-0{,}8^5}{1-0{,}8} = 168{,}08.$$

Kacper w ciągu pięciu dni wydał 168,08 zł.

Zadanie 63.

Oznaczamy: q — iloraz ciągu (a_n).

Z warunków zadania wynika, że $a_5 - a_3 = 3(a_4 - a_3)$ oraz wyrazy ciągu (a_n) są różne od 0, ponadto q jest różne od 0 i od 1, ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są różne.

Ponieważ $a_5 = a_3 q^2$ oraz $a_4 = a_3 q$, otrzymujemy równanie:

$$a_3 q^2 - a_3 = 3(a_3 q - a_3),$$

$$a_3 q^2 - a_3 = 3a_3 q - 3a_3,$$

$$a_3 q^2 - 3a_3 q + 2a_3 = 0,$$

$$a_3(q^2 - 3q + 2) = 0.$$

Ponieważ $a_3 \neq 0$, to

$$q^2 - 3q + 2 = 0;$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1;$$

$$q = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 1 \quad \text{lub} \quad q = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2.$$

Z warunków zadania wynika, że iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 2.

Zadanie 64.

I sposób

Aby wykazać, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, wykażemy, że istnieje liczba q_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $b_n = b_1 \cdot q_1^{n-1}$.

Oznaczmy przez q iloraz ciągu geometrycznego (a_n). Wtedy

$a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_{n+2} = a_1 q^{n+1}$, $(2a_{n+2})^2 = 4a_1^2 q^{2n+2}$.

Stąd

$$b_n = a_n (2a_{n+2})^2 = a_1 q^{n-1} \cdot 4a_1^2 q^{2n+2} = 4a_1^3 q^{3n+1} =$$
$$= 4a_1^3 q^4 q^{3n-3} = 4a_1^3 q^4 q^{3(n-1)} = 4a_1^3 q^4 \cdot \left(q^3\right)^{n-1}.$$

Ciąg (b_n) jest więc ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $b_1 = 4a_1^3 q^4$ oraz ilorazie q_1 równym q^3.

Uwaga: Można też zapisać, że

$$b_n = 4a_1^3 q^4 q^{3(n-1)}, \quad b_{n+1} = 4a_1^3 q^4 q^{3n},$$

i sprawdzić, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $b_{n+1} : b_n = q^3$.

II sposób

Aby wykazać, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, wykażemy, że istnieje liczba q_1 taka, że dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q_1$.

Oznaczmy przez q iloraz ciągu (a_n). Dla $n \geq 1$ mamy

$$b_{n+1} : b_n = \left(a_{n+1}(2a_{n+3})^2\right) : \left(a_n (2a_{n+2})^2\right) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{(2a_{n+3})^2}{(2a_{n+2})^2} = q \cdot q^2 = q^3,$$

czyli ciąg (b_n) jest geometryczny o ilorazie $q_1 = q^3$.

Ciąg (b_n) jest więc ciągiem geometrycznym o ilorazie równym q^3.

Zadanie 65.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą dodatnią.

Oznaczmy przez q iloraz ciągu (a_n). Dla $n \geq 1$ mamy:

$$a_n = f(3n) = 2^{3n},$$

$$a_{n+1} = f(3(n+1)) = 2^{3(n+1)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{3(n+1)}}{2^{3n}} = \frac{2^{3n} \cdot 2^3}{2^{3n}} = 8 = q.$$

Iloraz ten jest stały dla każdej liczby $n \geq 1$, więc dany ciąg jest geometryczny, o ilorazie $q = 8$.

Zadanie 66.

I sposób

Wykorzystujemy wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego ($a_n = a_1 q^{n-1}$) i obliczamy iloczyn

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_1 a_1 q a_1 q^2 a_1 q^3 a_1 q^4 = a_1^5 q^{1+2+3+4} = a_1^5 q^{10} = \left(a_1 q^2\right)^5 = a_3^5 .$$

Przedstawiliśmy iloczyn wyrazów w postaci piątej potęgi wyrazu środkowego (trzeciego).

II sposób

Jeżeli $a_3 = 0$, to iloczyn wyrazów jest też równy 0. Jeżeli $a_3 \neq 0$, to oznacza, że iloraz ciągu $q \neq 0$ i iloczyn wyrazów można zapisać w postaci:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = \frac{a_3}{q^2} \cdot \frac{a_3}{q} \cdot a_3 \cdot a_3 q \cdot a_3 q^2 = a_3^5 .$$

Zatem przedstawiliśmy iloczyn wyrazów jako a_3^5.

3.4. Geometria

Zadanie 69.

D

Zadanie 70.

C

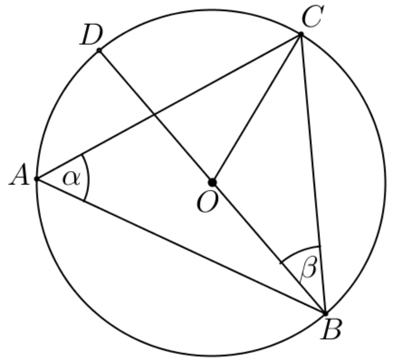
Zadanie 71.

Kąt BCD jest kątem wpisanym opartym na półokręgu i $|\sphericalangle BCD| = 90^\circ$. Ponieważ kąty BDC i BEC są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku *BC*, to $|\sphericalangle BDC| = 60^\circ$.

Zatem $|\sphericalangle CBD| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Zadanie 72.

I sposób



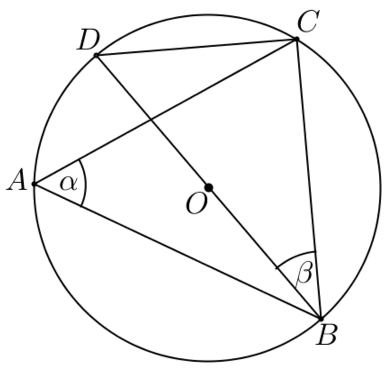
Kąt BAC jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy BOC, więc $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$. Ponieważ trójkąt BOC jest równoramienny ($|BO| = |CO|$), to $|\sphericalangle OBC| = |\sphericalangle OCB| = \beta$.

Na podstawie twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie BOC mamy:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

co należało wykazać.

II sposób



Kąt BCD jest kątem wpisanym opartym na półokręgu i $|\sphericalangle BCD| = 90^\circ$. Ponieważ kąty BAC i BDC są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, to $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$.

Na podstawie twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie prostokątnym BCD mamy:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ,$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

co należało wykazać.

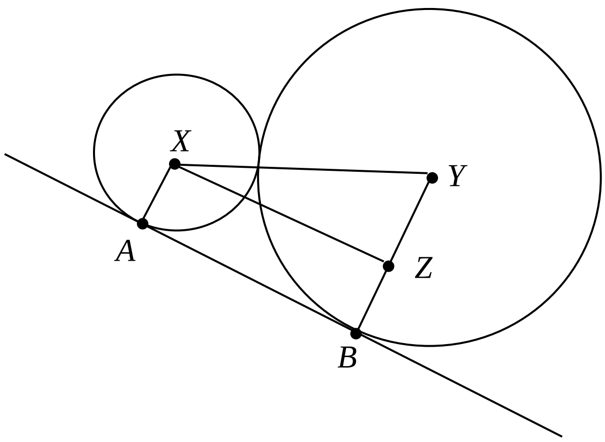
Zadanie 73.

Ponieważ kąt BED jest kątem wpisanym opartym na średnicy BD, to $|\sphericalangle BED| = 90^\circ$. Zatem odcinek DE jest prostopadły do prostej BE. Z warunku równoległości odcinków DE i AC wynika, że prosta BE jest prostopadła do boku AC, co dowodzi tezy.

Zadanie 74.

D

Zadanie 75.



Niech X i Y będą środkami danych okręgów. Powstaje trapez prostokątny $ABYX$, którego boki mają długości:

$$|AX| = r,\ |XY| = r + R,\ |BY| = R,\ |AB| = 5.$$

Zauważmy, że gdy przez punkt X poprowadzimy prostą równoległą do odcinka AB, to powstaje trójkąt prostokątny XYZ o bokach: $|XZ| = 5, |XY| = r + R, |YZ| = R - r$.

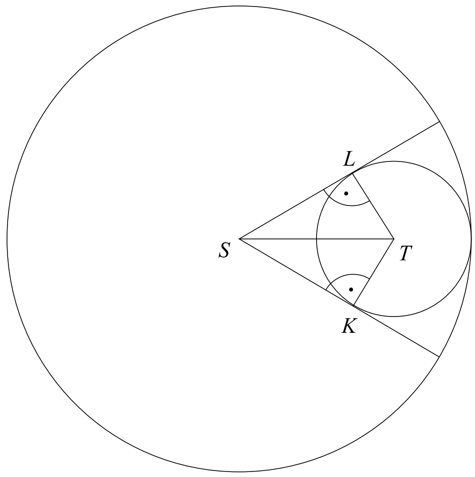
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy: $(r + R)^2 = (R - r)^2 + 5^2$.

Wobec tego $2rR = -2rR + 5^2$, czyli $rR = \frac{25}{4}$.

Zadanie 76.

I sposób

Sporządźmy odpowiedni rysunek.



Zauważmy, że pole czworokąta $SKTL$ jest sumą pól dwóch przystających trójkątów prostokątnych: SKT oraz STL.

Tak więc pole danego czworokąta jest równe $P = 2 \cdot \frac{1}{2} |SK| \cdot |KT|$.

Odcinek KT jest promieniem okręgu O_2 , tak więc $|KT| = 2$.

Odcinek SK jest jedną z przyprostokątnych trójkąta SKT.

$|SK| = \sqrt{|ST|^2 - |KT|^2}$

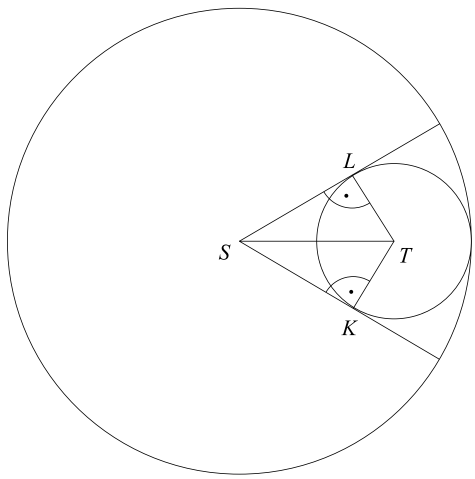
Długość odcinka ST jest równa różnicy promieni danych okręgów: $|ST| = 6 - 2 = 4$.

Tak więc $|SK| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Wynika z tego, że pole czworokąta $SKTL$ jest równe $P = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$.

II sposób

Sporządźmy odpowiedni rysunek.



Obróćmy trójkąt SKT wokół punktu S o kąt LSK przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, w wyniku czego odcinek SK trafia na odcinek SL.

Obliczamy wtedy pole trójkąta równoramiennego $T'ST$, gdzie T' jest obrazem punktu T w opisanym obrocie. (Otrzymujemy trójkąt, bo kąty TLS i TKS są kątami prostymi).

Szukane pole jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |LT| \cdot |SK| = |LT| \cdot |SK| .$$

Odcinek *LT* jest promieniem okręgu O_2, tak więc $|LT| = 2$.

Odcinek *SK* jest jedną z przyprostokątnych trójkąta *SKT*:

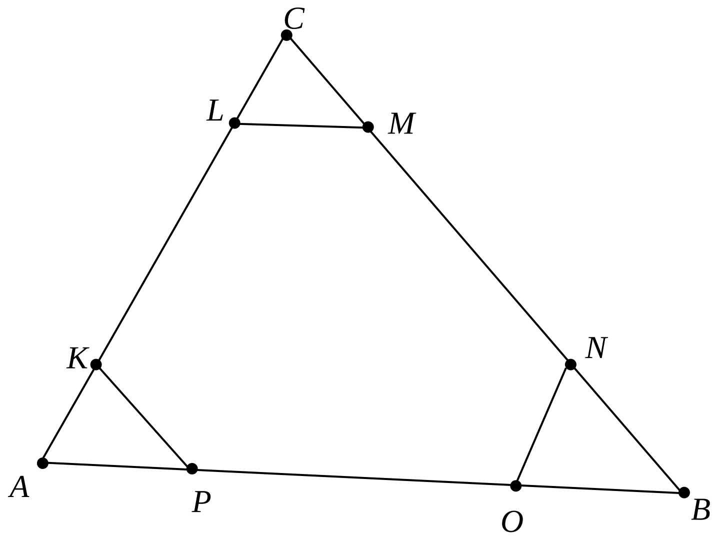
$$|SK| = \sqrt{|ST|^2 - |KT|^2},$$

$$|SK| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Wynika z tego, że pole czworokąta *SKTL* jest równe $P = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$.

Zadanie 77.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas trójkąt *AKP* jest podobny do trójkąta *ACB*, gdyż $\frac{AK}{AC} = \frac{x}{x+y+x}$, $\frac{AP}{AB} = \frac{x}{x+y+x}$ i $\angle KAP = \angle CAB$. Skala podobieństwa wynosi $\frac{x}{x+y+x}$. Zatem pole trójkąta *AKP* jest równe $\left(\frac{x}{2x+y}\right)^2 S$.

Analogicznie dowodzimy, że trójkąt *CLM* jest podobny do trójkąta *CAB* oraz że trójkąt *BNO* jest podobny do trójkąta *BCA*. Skale podobieństwa są także równe $\frac{x}{2x+y}$. Czyli pola trójkątów *CLM* i *BNO* są równe $\left(\frac{x}{2x+y}\right)^2 S$.

Wobec tego pole sześciokąta *KLMNOP* jest równe: $S\left[1 - 3\left(\frac{x}{2x+y}\right)^2\right]$.

Zadanie 78.

Trójkąty ABC i CDE są podobne na mocy cechy podobieństwa trójkątów *k*-*k*-*k*, ponieważ:

1. z warunków zadania $|\angle CAB| = |\angle CED|$;
2. $|\angle ACB| = |\angle ECD|$ jako kąty wierzchołkowe;
3. $|\angle ABC| = |\angle CDE|$ z sumy kątów w trójkącie.

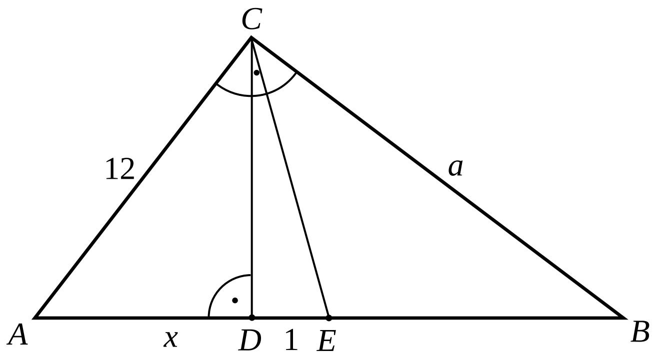
Z podobieństwa trójkątów zapisujemy więc równość:

$$\frac{10}{5} = \frac{|CD|}{3},$$
$$5 \cdot |CD| = 30,$$
$$|CD| = 6.$$

Odpowiedź: Bok CD ma długość 6.

Zadanie 79.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ punkt E jest środkiem boku AB trójkąta ABC, to $|BE| = x+1$.

Zauważmy, że trójkąty ADC i ACB są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A. Zatem prawdziwa jest równość $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, czyli

$$\frac{x}{12} = \frac{12}{2(x+1)},$$

$$x^2 + x - 72 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania:

$$x = \frac{-1-17}{2} = -9 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-1+17}{2} = 8.$$

Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż x to długość odcinka. Zatem $x = 8$.

Przeciwprostokątna AB trójkąta ABC ma więc długość

$$|AB| = 2(x+1) = 2 \cdot 9 = 18.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABC* obliczamy długość przyprostokątnej *BC*:

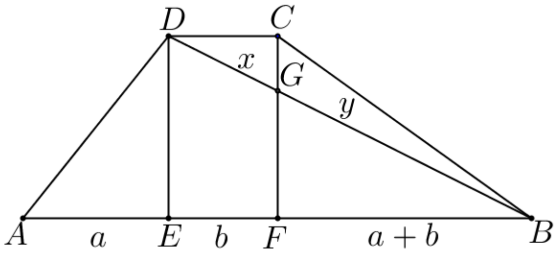
$$a = \sqrt{18^2 - 12^2} = \sqrt{(18-12)(18+12)} = \sqrt{6 \cdot 30} = 6\sqrt{5}.$$

Obwód trójkąta *ABC* jest zatem równy $L_{ABC} = 12 + 18 + 6\sqrt{5} = 30 + 6\sqrt{5}$.

Zadanie 80.

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Punkt *G* to punkt przecięcia wysokości i przekątnej,

$$|AE| = a, \quad |EF| = b, \quad |FB| = a+b, \quad |DG| = x, \quad |GB| = y.$$

Z warunków zadania mamy zależność: $\frac{a}{a+2b} = \frac{2}{5}$.

Przekształcając w sposób równoważny tę równość, otrzymujemy kolejno:

$$5a = 2a + 4b,$$

$$3a = 4b,$$

$$a = \frac{4}{3}b,$$

$$a + b = \frac{7}{3}b,$$

$$a + 2b = \frac{10}{3}b.$$

Na mocy cechy podobieństwa *k*-*k*-*k* trójkątów *DEB* i *GFB* mamy:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{a+2b}{a+b},$$

$$\frac{x+y}{y} = \frac{\frac{10}{3}b}{\frac{7}{3}b},$$

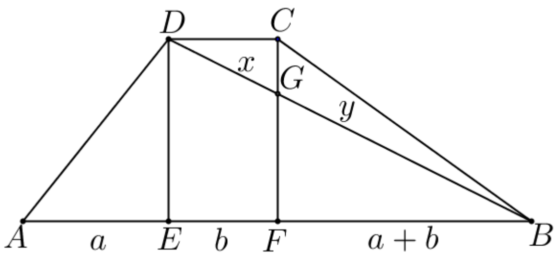
$$\frac{x+y}{y}=\frac{10}{7},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{7},$$

co należało wykazać.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Punkt G to punkt przecięcia wysokości i przekątnej,

$$|AE|=a,\quad |EF|=b,\quad |FB|=a+b,\quad |DG|=x,\quad |GB|=y.$$

Z warunków zadania mamy zależność: $\frac{a}{a+2b}=\frac{2}{5}$.

Przekształcając w sposób równoważny tę równość, otrzymujemy kolejno:

$$5a=2a+4b,$$

$$3a=4b,$$

$$b=\frac{3}{4}a,$$

$$a+b=\frac{7}{4}a.$$

Z twierdzenia Talesa mamy: $\frac{x}{y}=\frac{b}{a+b}$. Zatem otrzymujemy:

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{3}{4}\cdot a}{\frac{7}{4}\cdot a},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{7},$$

co należało wykazać.

Zadanie 81.

Wprowadzamy oznaczenia: d — długość odcinka dwusiecznej zawartego w trójkącie ABC, D — punkt przecięcia dwusiecznej z bokiem AB. Zapiszemy pole trójkąta na dwa sposoby:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} ba \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P_{ABC} = P_{BCD} + P_{ACD} = \frac{1}{2} ad \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} bd \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(a+b)d.$$

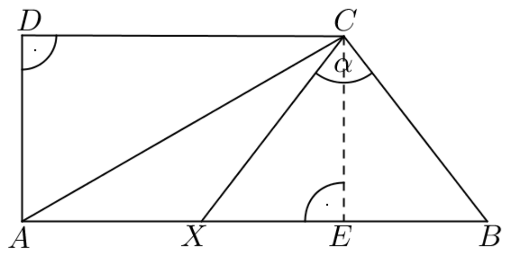
Porównujemy pole trójkąta ABC zapisane na dwa sposoby i otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{2}(a+b)d = ba \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

z którego otrzymujemy wzór na długość odcinka dwusiecznej: $d = \dfrac{\sqrt{3}ab}{a+b}$.

Zadanie 82.

I sposób



Przyjmijmy oznaczenie: $|\sphericalangle XCB| = \alpha$

Niech CE będzie wysokością trójkąta XBC opuszczona na bok XB. Z warunków zadania zachodzą równości: $|CE| = |DA|$, $|AB| = 10$, $|DC| = 6$, $|EB| = 4$, $|AC| = 2 \cdot |DA|$, $|CB| = |CX|$.

W trójkącie prostokątnym AEC z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|CE|^2 + 6^2 = (2|CE|)^2,$$

$$|CE|^2 + 36 = 4 \cdot |CE|^2,$$

$$3 \cdot |CE|^2 = 36,$$

$$|CE|^2 = 12.$$

Zatem $|CE| = 2\sqrt{3}$.

W trójkącie prostokątnym CEB z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = |BC|^2,$$

$$|CB| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} = |CX|.$$

Obliczamy pole trójkąta XBC:

$$P = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2},$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sin\alpha.$$

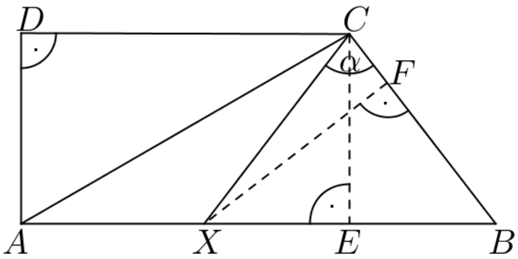
Z porównania pól trójkąta XBC otrzymujemy równanie:

$$\frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sin\alpha,$$

$$8\sqrt{3} = 14 \cdot \sin\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

II sposób



Przyjmijmy oznaczenie: $|\angle XCB| = \alpha$, XF — wysokość trójkąta XBC opuszczona na bok CB, CE — wysokość trójkąta XBC opuszczona na bok XB. Z warunków zadania zachodzą równości: $|CE| = |DA|$, $|AB| = 10$, $|DC| = 6$, $|EB| = 4$, $|AC| = 2 \cdot |DA|$, $|CB| = |CX|$.

W trójkącie prostokątnym AEC z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|CE|^2 + 6^2 = \left(2|CE|\right)^2,$$

$$|CE|^2 + 36 = 4 \cdot |CE|^2,$$

$$3 \cdot |CE|^2 = 36,$$

$$|CE|^2 = 12.$$

Zatem $|CE| = 2\sqrt{3}$.

W trójkącie prostokątnym CEB z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = |CB|^2,$$

$$|CB| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} = |CX|.$$

Obliczamy pole trójkąta XBC:

$$P = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2},$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot |XF|.$$

Z porównania pól trójkąta XBC otrzymujemy równanie:

$$\frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot |XF|,$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = |XF|.$$

W trójkącie prostokątnym XFC obliczamy $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{|XF|}{|XC|},$$

$$\sin\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Zadanie 83.

Punkt $A = (1,5)$ nie leży na prostej $y = 2x - 2$.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 2x - 2$, która przechodzi przez punkt A: $y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{cases}$, stąd $x = 3$, $y = 4$.

Współrzędne sąsiedniego wierzchołka kwadratu, np. B, są równe $B = (3,\ 4)$.

Obliczamy długość boku kwadratu $|AB| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Trzeci wierzchołek kwadratu leży na prostej $y = 2x - 2$, stąd $C = (x, 2x - 2)$.

$$|BC| = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-2-4)^2} = \sqrt{5},$$

$$x^2-6x+9+4x^2-24x+36=5,$$

$$5x^2-30x+45=5,$$

$$x^2-6x+8=0,\quad \Delta=4\ x_1=2,\quad x_2=4.$$

Otrzymujemy $C_1=(2,\ 2)$ lub $C_2=(4,\ 6)$.

Środek okręgu opisanego na kwadracie o wierzchołkach $A=(1,5)$, $B=(3,\ 4)$, $C_1=(2,\ 2)$ ma współrzędne $S_1=\left(1\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2}\right)$, a środek okręgu opisanego na kwadracie o wierzchołkach $A=(1,5)$, $B=(3,\ 4)$, $C_2=(4,\ 6)$ ma współrzędne $S_2=\left(2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 84.

Proste $y=2x-3$, $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ nie są prostopadłe, ponieważ $a_1\cdot a_2=2\cdot\frac{1}{4}\neq -1$.

Jedna z tych prostych zawiera przyprostokątną, a druga przeciwprostokątną trójkąta.
Rozpatrujemy dwa przypadki:

1. trzeci bok trójkąta jest zawarty w prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=2x-3$,
2. trzeci bok trójkąta jest zawarty w prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$.

Ad 1. $y=-\frac{1}{2}x+b_1$, $-2=-\frac{1}{2}\cdot 4+b_1$, $b_1=0$, stąd mamy $y=-\frac{1}{2}x$.

Ad 2. $y=-4x+b_2$, $-2=-4\cdot 4+b_2$, $b_2=14$, stąd $y=-4x+14$.

Sprawdzamy, czy rozwiązania wyznaczają z danymi prostymi trójkąt niezdegenerowany, tzn. czy trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie. Proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x$, $y=-4x+14$ nie powinny przechodzić przez jeden z wierzchołków trójkąta, którym jest punkt przecięcia prostych o równaniach $y=2x-3$, $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$.

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia tych prostych, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \end{cases}$. Wierzchołek trójkąta wyznaczony przez te proste ma współrzędne $(1,-1)$.

Żadna z dwóch otrzymanych prostych $y=-\frac{1}{2}x$ i $y=-4x+14$ nie przechodzi przez ten punkt ($-1\neq-\frac{1}{2}\cdot 1,\ -1\neq-4\cdot 1+14$).

Trzeci bok trójkąta prostokątnego *ABC* zawiera się więc w prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x$ albo w prostej o równaniu $y=-4x+14$.

Zadanie 85.

Wprowadzamy oznaczenia: niech a oznacza współczynnik kierunkowy jednej prostej, a b — współczynnik kierunkowy drugiej prostej. Oczywiście $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Zapisujemy podaną własność w postaci równości: $a - b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ i przekształcamy ją kolejno:

$ab(a-b) = b-a$ (po pomnożeniu równania przez ab),

$ab(a-b) + (a-b) = 0$ (po przeniesieniu na jedną stronę),

$(a-b)(ab+1) = 0$ (po wyłączeniu wspólnego czynnika),

$a = b$ lub $ab = -1$.

Otrzymany zapis dowodzi, że te proste są równoległe (mają równe współczynniki kierunkowe) albo prostopadłe (iloczyn współczynników kierunkowych jest równy -1).

Zadanie 86.

I sposób

Obliczamy drugie współrzędne punktów A i B:

$$f(-2) = 7, \quad \text{zatem} \quad A = (-2,7);$$

$$f(2) = -1, \quad \text{zatem} \quad B = (2,-1).$$

Przyjmujemy oznaczenie: $C = (x, y)$.

Otrzymujemy zależności $\frac{-2+x}{2} = 2$ oraz $\frac{7+y}{2} = -1$.

Stąd $x = 6$ i $y = -9$.

Zatem $C = (6,-9)$.

II sposób

Obliczamy drugie współrzędne punktów A i B:

$$f(-2) = 7, \quad \text{zatem} \quad A = (-2,7);$$

$$f(2) = -1, \quad \text{zatem} \quad B = (2,-1).$$

Przyjmujemy oznaczenie: $C = (x, y)$.

Z warunków zadania wynika, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Stąd $[4,-8] = [x-2, y+1]$.

Otrzymujemy zależności $x - 2 = 4$ oraz $y + 1 = -8$, $x = 6$ i $y = -9$.

Zatem $C = (6,-9)$.

Zadanie 87.

Zauważamy, że odcinek *AB* jest średnicą okręgu, bo środek okręgu leży na prostej *l*. Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i otrzymujemy:

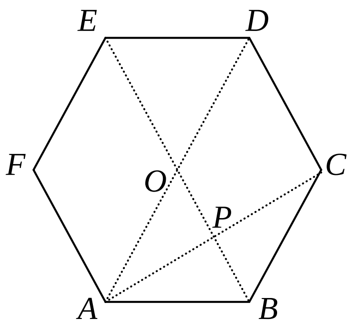
$$S=\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}}{2}\right),$$

czyli $S=\left(1,\ \frac{-1}{4}\right)$. Sprawdzamy, czy punkt *S* leży na prostej *k*, wstawiając współrzędne punktu do równania prostej:

$$1-4\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)=1+1=2\neq 0,$$

więc środek okręgu nie leży na prostej *k*.

Zadanie 88.



Zauważamy, że w sześciokącie foremnym punkt *O* jest środkiem odcinka *AD* i odpowiednio *P* jest środkiem *OB*, *O* środkiem *BE*, *P* środkiem *AC* i *O* środkiem *CF*. Za każdym razem mamy jeden koniec odcinka, np. $Q=(x_1,\ y_1)$ i jego środek $S=(x_S,\ y_S)$, a szukamy drugiego końca tego odcinka np. $R=(x_2,\ y_2)$. Korzystamy ze wzoru na współrzędne środka odcinka, wyszukując odpowiednie odcinki i ich środki: $\begin{cases} x_2=2x_s-x_1 \\ y_2=2y_s-y_1 \end{cases}$, stąd otrzymujemy kolejno np.:

$$D=\left(6-1,\ -2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right),\quad D=\left(5,\ \sqrt{3}\right),$$

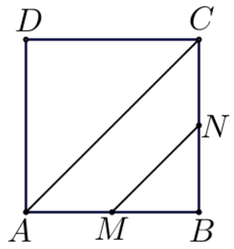
$$B=\left(8-3,\ -4\sqrt{3}+\sqrt{3}\right),\quad B=\left(5,\ -3\sqrt{3}\right),$$

$$E=\left(6-5,\ -2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right),\quad E=\left(1,\ \sqrt{3}\right),$$

$$C=\left(8-1,\ -4\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right),\quad C=\left(7,\ -\sqrt{3}\right),$$

$$F=\left(6-7,\ -2\sqrt{3}+\sqrt{3}\right),\quad F=\left(-1,\ -\sqrt{3}\right).$$

Zadanie 89.



$$|MN|=\sqrt{(8-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Ponieważ punkty M i N są środkami dwóch sąsiednich boków kwadratu $ABCD$, to korzystając z podobieństwa trójkątów ACB i MNB, przekątna AC kwadratu ma długość $|AC|=2\cdot|MN|$.

Zatem $|AC|=2\cdot 2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$.

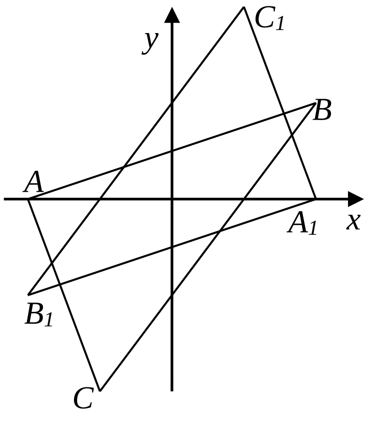
Niech a oznacza długość boku kwadratu.

Korzystając ze wzoru na długość przekątnej kwadratu, otrzymujemy: $a=\dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=4\sqrt{5}$.

Uwaga: Długość boku kwadratu możemy również obliczyć ze wzoru na pole kwadratu.

Zadanie 90.

Rysujemy w układzie współrzędnych trójkąt ABC i znajdujemy jego obraz w symetrii środkowej względem początku układu.



Część wspólna tych trójkątów jest sześciokątem. Stosujemy wzór na sumę kątów wielokąta $S_n=(n-2)\cdot 180°$ i otrzymujemy $S_6=4\cdot 180°=720°$.

Zadanie 91.

Korzystamy z własności symetrii osiowej. Oś Ox jest osią symetrii figury złożonej z dwóch prostych wtedy, gdy jedna z prostych jest obrazem drugiej w symetrii osiowej względem tej osi. Mogą zajść dwie możliwości:

proste się przecinają na osi,

proste są równoległe do osi i w jednakowej odległości od niej.

Ad a) z własności symetrii osiowej względem osi Ox wiemy, że obrazem prostej o równaniu $y = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = -ax - b$, stąd otrzymujemy, że

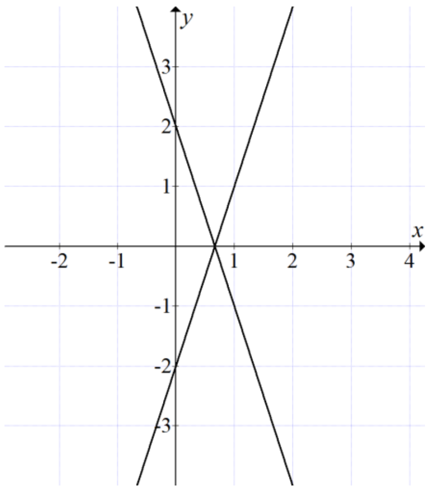
$$\begin{cases} p+2=-q+5 \\ -q=-2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q=3 \\ q=2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=2 \end{cases}$$

Ad b) współczynniki równań prostych równoległych do osi Ox i leżących w jednakowej odległości od niej spełniają warunek

$$\begin{cases} p+2=0 \\ q-5=0 \\ -q=-2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-2 \\ q=5 \\ -5=4 \ \text{sprzeczne} \end{cases}$$

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że taka sytuacja przy tych współczynnikach p i q nie zachodzi.

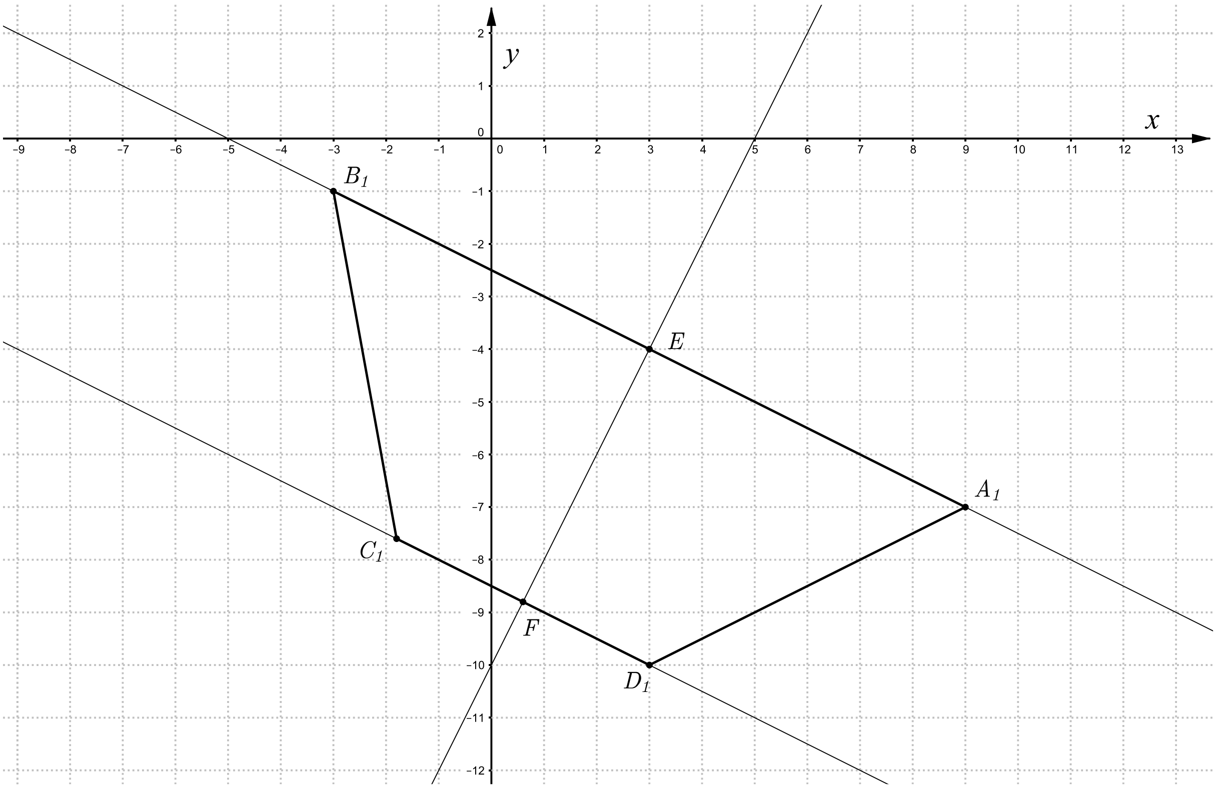
Zatem proste mają równania: $y = 3x - 2$ i $y = -3x + 2$.



Zadanie 92.

W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych obrazem punktu $P = (x, y)$ jest punkt $P_1 = (-x, -y)$.

Stąd otrzymujemy: $A_1 = (9, -7)$, $B_1 = (-3, -1)$, $D_1 = (3, -10)$.



Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej A_1B_1:

$$a_1 = \frac{-7+1}{9+3} = -\frac{1}{2}.$$

Niech punkt E będzie środkiem odcinka A_1B_1.

$$x_E = \frac{9-3}{2} = 3,$$

$$y_E = \frac{-7-1}{2} = -4.$$

Zatem $E = (3,-4)$.

Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka A_1B_1, która jest osią symetrii trapezu:

$$y = 2x + k,$$

$$-4 = 2 \cdot 3 + k,$$

$$k = -10.$$

Oś symetrii trapezu $A_1B_1C_1D_1$ ma równanie $y = 2x - 10$.

Wyznaczamy równanie prostej C_1D_1 równoległej do prostej A_1B_1:

$$y = -\frac{1}{2}x + m,$$

$$-10 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + m,$$

$$m = -8\frac{1}{2}.$$

$$C_1D_1: y = -\frac{1}{2}x - 8\frac{1}{2}.$$

Obliczamy współrzędne punktu F będącego środkiem podstawy C_1D_1:

$$\begin{cases} y = 2x - 10 \\ y = -\frac{1}{2}x - 8\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 10 \\ 2x - 10 = -\frac{1}{2}x - 8\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 10 \\ 2\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = 2 \cdot \frac{3}{5} - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -8\frac{4}{5} = -\frac{44}{5} \end{cases}$$

$$F = \left(\frac{3}{5}, -\frac{44}{5}\right)$$

Obliczamy współrzędne punktu C_1.

Niech $C_1 = (x, y)$.

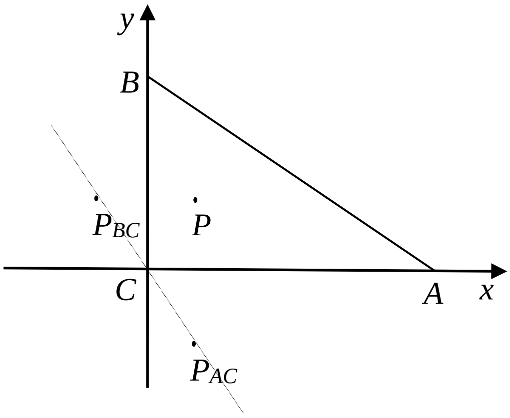
$$\frac{x+3}{2} = \frac{3}{5}, \quad \frac{y-10}{2} = -\frac{44}{5}.$$

$$x = \frac{-9}{5}, \quad y = \frac{-38}{5},$$

$$C_1 = (-1\frac{4}{5}, -7\frac{3}{5}).$$

Współrzędne wierzchołków trapezu $A_1B_1C_1D_1$ są równe: $A_1 = (9, -7)$, $B_1 = (-3, -1)$, $C_1 = (-1\frac{4}{5}, -7\frac{3}{5})$, $D_1 = (3, -10)$. Oś symetrii tego trapezu ma równanie $y = 2x - 10$.

Zadanie 93.



I sposób

Oznaczmy kąty: $|\angle ACP| = \alpha$, $|\angle BCP| = \beta$. Wtedy $\alpha + \beta = 90°$. Z własności symetrii osiowej otrzymujemy, że $|\angle ACP_{AC}| = |\angle ACP| = \alpha$, $|\angle BCP_{BC}| = |\angle BCP| = \beta$. Obliczamy miarę kąta $|\angle P_{AC}CP_{BC}| = |\angle ACP_{AC}| + |\angle ACP| + |\angle BCP| + |\angle BCP_{BC}|$, więc

$|\angle P_{AC}CP_{BC}| = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$, a to oznacza, że kąt jest półpełny, więc punkty P_{AC}, C i P_{BC} są współliniowe.

II sposób

Wprowadzamy współrzędne punktu $P = (p,\ q)$. Znajdujemy obrazy punktu P w obu symetriach osiowych: $P_{AC} = (p,\ -q)$ i $P_{BC} = (-p,\ q)$. Zapisujemy równanie prostej przechodzącej np. przez punkty $P_{AC} = (p,\ -q)$ i $C = (0,\ 0)$: $y = -\frac{q}{p}x$. Sprawdzamy, czy trzeci z punktów (tj. $P_{BC} = (-p,\ q)$) leży na tej prostej: $-\frac{q}{p} \cdot (-p) = q$. Zapisana równość jest prawdziwa, więc punkty P_{BC}, P_{AC}, C leżą na jednej prostej.

Zadanie 94.

B

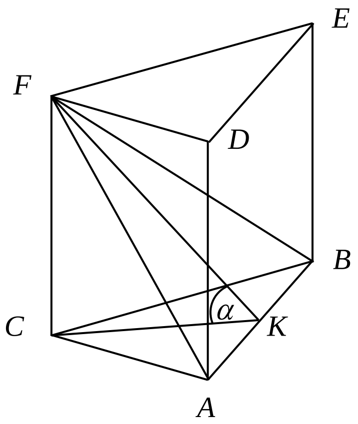
Zadanie 95.

B

Zadanie 96.

C

Zadanie 97.



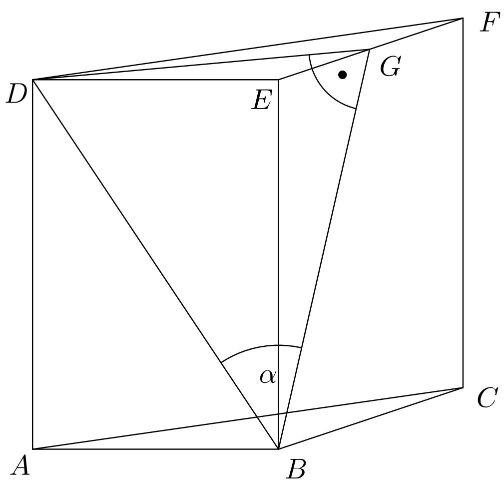
Na rysunku zaznaczamy kąt między wysokością trójkąta *ABF* poprowadzoną z wierzchołka *F* i płaszczyzną podstawy *ABC* tego graniastosłupa i oznaczamy: $|\angle FKC| = \alpha$, gdzie punkt *K* jest środkiem boku *AB*.

$\text{tg}\alpha = \frac{|CF|}{|CK|} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, więc $|CK| = 2\sqrt{3}$.

Trójkąt *ABC* jest równoboczny i jego wysokość $|CK| = 2\sqrt{3}$, więc $|AB| = 4$.

Obliczamy wysokość $|KF| = \sqrt{8^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{19}$ (z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *CKF*), a następnie obliczamy pole trójkąta $P_{\Delta ABF} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{19}}{2} = 4\sqrt{19}$.

Zadanie 98.



Punkt *G* jest środkiem boku *EF*, a kąt *DGE* jest prosty.

Trójkąt *BDG* jest trójkątem prostokątnym z kątem prostym przy wierzchołku *G*, a kąt *DBG* jest kątem nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej. Oznaczmy go α.

Podstawa graniastosłupa jest trójkątem równobocznym o boku 4, więc $|DG| = 2\sqrt{3}$.

Obliczamy wysokość $|AD| = H$ graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H,\ 16\sqrt{6} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot H,$$

a stąd $H = 4\sqrt{2}$.

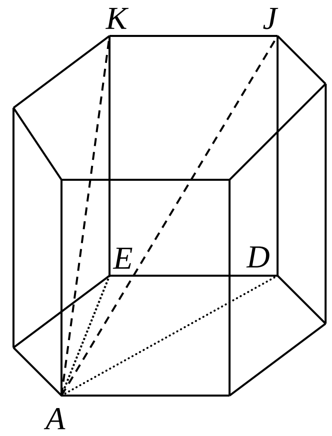
Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *ABD* obliczamy długość odcinka *BD*:

$$|BD| = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 4\sqrt{3}.$$

Z funkcji trygonometrycznych w trójkącie *BDG* obliczamy miarę kąta α :

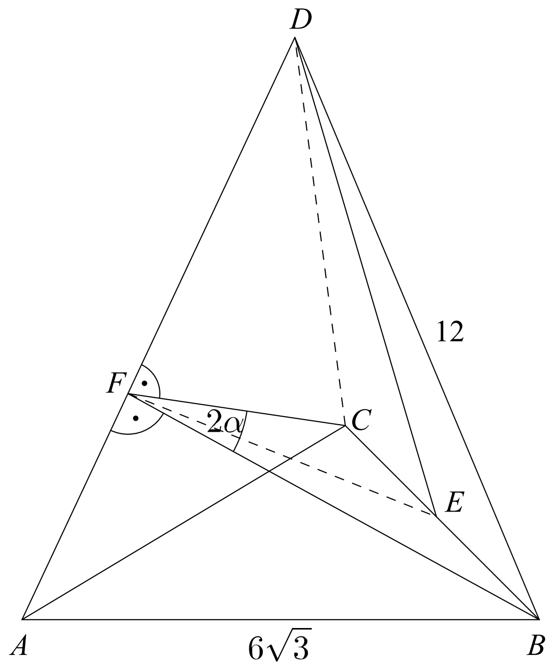
$\dfrac{|DG|}{|DB|} = \sin\alpha$, stąd mamy $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$, stąd $\alpha = 30°$.

Zadanie 99.



Wprowadzamy oznaczenia: $|\sphericalangle EAK| = \beta,\ |\sphericalangle DAJ| = \alpha$, długość krawędzi podstawy $|ED| = a,$ długość krawędzi bocznej $|EK| = |DJ| = h$ oraz długość krótszej przekątnej graniastosłupa $|AK| = k$. Z własności sześciokąta foremnego (wynikającej z podziału na sześć trójkątów równobocznych) otrzymujemy, że $|AD| = 2a$, $|AE| = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. W trójkącie *AEK* $\sin\beta = \dfrac{h}{k}$, czyli $\dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{h}{k}$; stąd $k = \dfrac{h\sqrt{7}}{2}$ i z twierdzenia Pitagorasa $\left(a\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \left(\dfrac{h\sqrt{7}}{2}\right)^2$ wyznaczamy $h = 2a$. Następnie w trójkącie *ADJ* otrzymujemy $\text{tg}\alpha = \dfrac{|DJ|}{|AD|} = \dfrac{h}{2a} = \dfrac{2a}{2a} = 1$, a to oznacza, że $\alpha = 45°$.

Zadanie 100.



Sporządźmy odpowiedni rysunek.

Kąt między ścianami bocznymi tego ostrosłupa to kąt *BFC*. Przyjmijmy, że jego miara jest równa 2α.

Ponieważ ściany te są przystające, to $|BF| = |FC|$. Zatem wysokość *FE* trójkąta *BFC* dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne *BFE* i *CFE*.

Oznaczmy kąt *BFE* (a więc i *CFE*) przez α.

Sinus kąta α w trójkącie prostokątnym *BFE* jest równy $\sin\alpha = \frac{|BE|}{|BF|}$.

Odcinek *BE* jest równy $|BE| = \frac{|BC|}{2} = 3\sqrt{3}$.

Wyznaczymy długość odcinka *BF*.

Zauważmy, że jest on jedną z wysokości trójkąta *ABD*.

Pole trójkąta *ABD* (przystającego do trójkątów *BCD* oraz *ACD*) jest takie samo jak pole trójkąta BCD, a więc równe $P = \frac{1}{2} BC \cdot DE$. Ponadto pole to jest także równe $P = \frac{1}{2} AD \cdot BF$.

Wynika z tego, że $\frac{1}{2}|BC| \cdot |DE| = \frac{1}{2}|AD| \cdot |BF|$.

Z powyższego $|BF| = \frac{|BC| \cdot |DE|}{|AD|}$.

Wyznaczmy teraz długość odcinka *DE*. Jest on jedną z przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym *BED*. Druga przyprostokątna jest równa $|BE| = 3\sqrt{3}$, a przeciwprostokątna *BD* ma długość 12.

$$|DE| = \sqrt{12^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{144 - 27} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

Długość odcinka *BF* jest więc równa

$$|BF| = \frac{6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{13}}{12} = \frac{3\sqrt{39}}{2}.$$

Wyznaczmy teraz sinus kąta α :

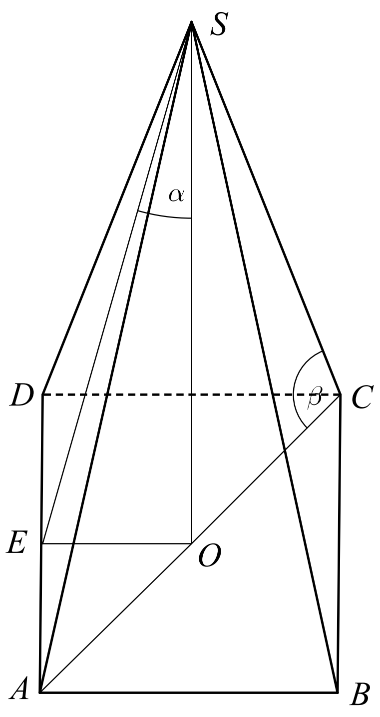
$$\sin\alpha = \frac{|BE|}{|BF|},$$

$$\sin\alpha = 3\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{39}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0{,}5547.$$

Miara kąta α jest więc równa $34°$. Tak więc $2\alpha = 68°$.

Zadanie 101.

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.



$\alpha = 30^\circ$, $r = 2\sqrt{2}$

Promień okręgu opisanego na podstawie to odcinek $\overline{OC}$.

$$|OC| = 2\sqrt{2}.$$

Przekątna kwadratu, który jest podstawą ostrosłupa, jest równa $|AC| = 4\sqrt{2}$.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 4.

Korzystamy z własności trójkąta prostokątnego EOS :

$$|EO| = 2,$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{|SO|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$|SO| = 2\sqrt{3}.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego COS:

$$|SC|^2 = |SO|^2 + |CO|^2,$$

$$|SC|^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2,$$

$$|SC|^2 = 20,$$

$$|SC| = 2\sqrt{5}.$$

Obliczamy sinus kąta β nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

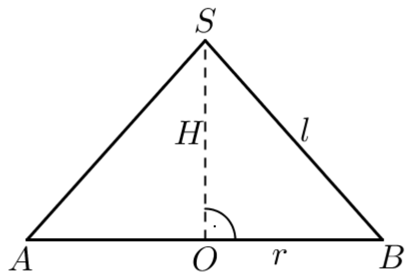
$$\sin\beta = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Uwaga: Zauważ, że zadanie można rozwiązać bez danych dotyczących promienia okręgu opisanego na podstawie.

Zadanie 102.

I sposób



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, na którym przedstawiono przekrój osiowy stożka.

Uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{3}{2},$$

$$2l = 3r,$$

$$r = \frac{2}{3} \cdot l.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SOB otrzymujemy:

$$H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2 = l^2,$$

$$H^2 = \frac{5}{9} \cdot l^2.$$

Ponieważ $H > 0$, to otrzymujemy $H = \frac{l \cdot \sqrt{5}}{3}$.

Kąt między tworzącą a płaszczyzną podstawy stożka to kąt SBO. Niech $|\sphericalangle SBO| = \alpha$.

W trójkącie prostokątnym SOB obliczamy sinus kąta α:

$$\sin\alpha = \frac{H}{l} = \frac{\frac{l \cdot \sqrt{5}}{3}}{l} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w I sposobie.

Uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{3}{2},$$

$$2l = 3r,$$

$$\frac{3}{2} \cdot r = l.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SOB otrzymujemy:

$$H^2 + r^2 = \left(\frac{3}{2} \cdot r\right)^2,$$

$$H^2 = \frac{5}{4} \cdot r^2.$$

Ponieważ $H > 0$, to otrzymujemy $H = \frac{r \cdot \sqrt{5}}{2}$.

Kąt między tworzącą a płaszczyzną podstawy stożka to kąt SBO. Niech $|\sphericalangle SBO| = \alpha$.

W trójkącie prostokątnym SOB obliczamy sinus kąta α:

$$\sin\alpha = \frac{H}{l} = \frac{\frac{r \cdot \sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2} \cdot r} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Zadanie 103.

Z warunków zadania mamy: $|CD| = |CB|$ oraz $|CB| = |BE|$, więc $|CD| = |BE|$.

Odcinki *AD* oraz *BD* są równe, ponieważ punkt *D* jest środkiem odcinka *AB*.

Oznaczamy: $|\sphericalangle CDB| = \alpha$, stąd $|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - \alpha$.

Trójkąt *BCD* jest równoramienny, więc $|\sphericalangle DBC| = \alpha$, stąd $|\sphericalangle DBE| = 180^\circ - \alpha$.

Z cechy przystawania trójkątów *b-k-b* wynika, że trójkąty *ADC* oraz *DBE* są przystające.

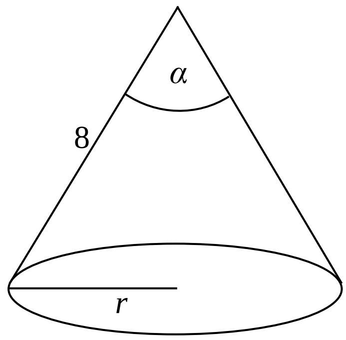
Z przystawania trójkątów wynika równość odpowiednich odcinków, czyli $|AC| = |DE|$.

Zadanie 104.

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku:

r — promień podstawy stożka,

α — kąt rozwarcia stożka.



Z warunków zadania otrzymujemy równanie

$$P_c = \pi r(r+8) = 48\pi,$$

$$r(r+8) = 48,$$

$$r^2 + 8r - 48 = 0, \quad \text{gdzie} \quad r \in (0,8).$$

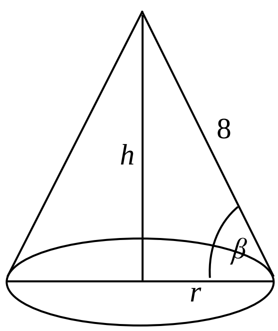
$\Delta = 64 + 192 = 256$, $\sqrt{\Delta} = 16$, $r_1 = \frac{-8+16}{2} = 4$, $r_2 = -12$; drugie rozwiązanie odrzucamy, bo nie spełnia warunków zadania.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem, w którym wszystkie boki mają taką samą długość 8. Jest to trójkąt równoboczny, więc $\alpha = 60^\circ$. Wysokość stożka jest równa $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Uwaga

Miarę kąta α można obliczyć, stosując funkcje trygonometryczne, np. oznaczamy β — kąt między tworzącą stożka i promieniem podstawy.



$$\frac{r}{l} = \cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2},$$

więc $\beta = 60^\circ$.

Z własności stożka wynika, że $\alpha = 180^\circ - 2\beta = 60^\circ$.

Wysokość h stożka obliczamy:

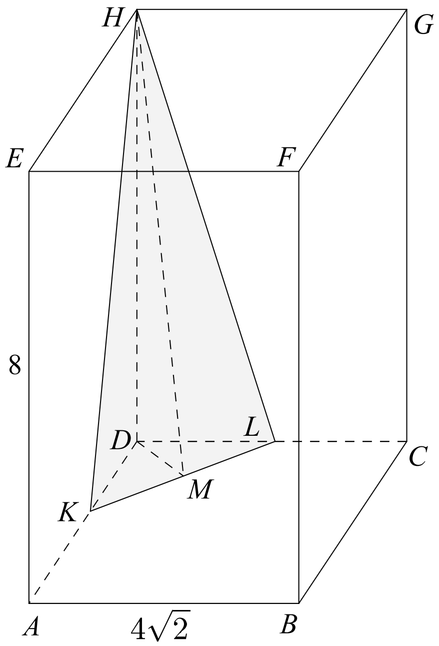
— z funkcji trygonometrycznych: $\frac{h}{l} = \sin\beta$, $h = 8 \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3}$

lub

— z twierdzenia Pitagorasa: $h^2 = l^2 - r^2 = 64 - 16 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$.

Zadanie 105.

Sporządźmy odpowiedni rysunek.



Oznaczmy przez K i L środki odpowiednich krawędzi. Niech M będzie środkiem odcinka KL. Zauważmy, że figurą otrzymaną w przekroju jest trójkąt równoramienny. Jego pole jest równe

$$P = \frac{1}{2}|KL| \cdot |MH|.$$

Wyznaczmy długości odcinków KL oraz MH.

Odcinek KL jest połową przekątnej kwadratu o boku $4\sqrt{2}$.

Tak więc $|KL| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$.

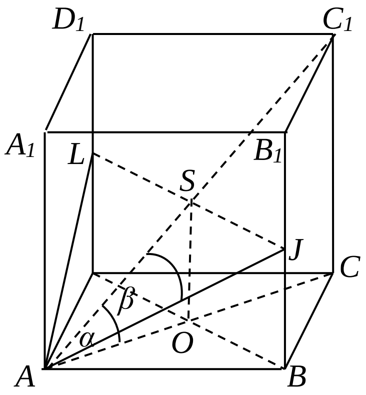
Odcinek MH jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym DMH o przyprostokątnych długości $|DH| = 8$, $|DM| = |MK| = \frac{1}{2}|KL| = 2$ oraz kącie prostym MDH (gdzie MDH jest kątem między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy w danym graniastosłupie).

$$|MH| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Pole przekroju jest więc równe: $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{17} = 4\sqrt{17}$.

Zadanie 106.

I sposób



Niech S będzie środkiem odcinka LJ, zaś O punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$. Oznaczmy długość krawędzi sześcianu przez a. Przekątna kwadratu o boku a jest równa $a\sqrt{2}$, zaś przekątna sześcianu o krawędzi a jest równa $a\sqrt{3}$. W trójkącie prostokątnym ACC_1 otrzymujemy, że

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AC_1|} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

natomiast w trójkącie prostokątnym ASJ otrzymujemy

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{|SJ|}{|AS|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{|AS|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Zatem $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$.

II sposób

Niech S będzie środkiem odcinka LJ, zaś O punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$. Trójkąt LAJ jest równoramienny, więc w trójkącie prostokątnym ASJ otrzymujemy

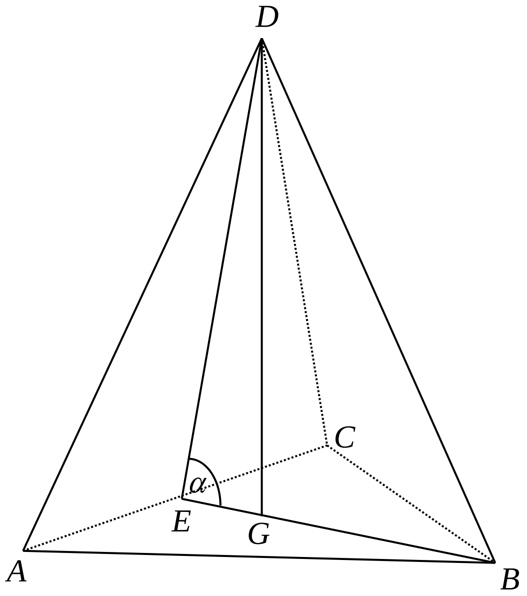
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{|SJ|}{|AS|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{|AS|} = \frac{|AC|}{2|AS|}.$$

Trójkąt *AOS* jest prostokątny i

$$\cos\alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{|AS|} = \frac{|AC|}{2|AS|}.$$

Wobec powyższego $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$.

Zadanie 107.



Wysokość ostrosłupa *DG* oznaczmy jako *h*, a krawędź podstawy jako *a*.

Z treści zadania mamy, że $a = 2h$.

Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoboczny, jego wysokość *BE* ma długość $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Punkt *G* dzieli odcinek *BE* w stosunku $\frac{|BG|}{|EG|} = \frac{2}{1}$, czyli $|EG| = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

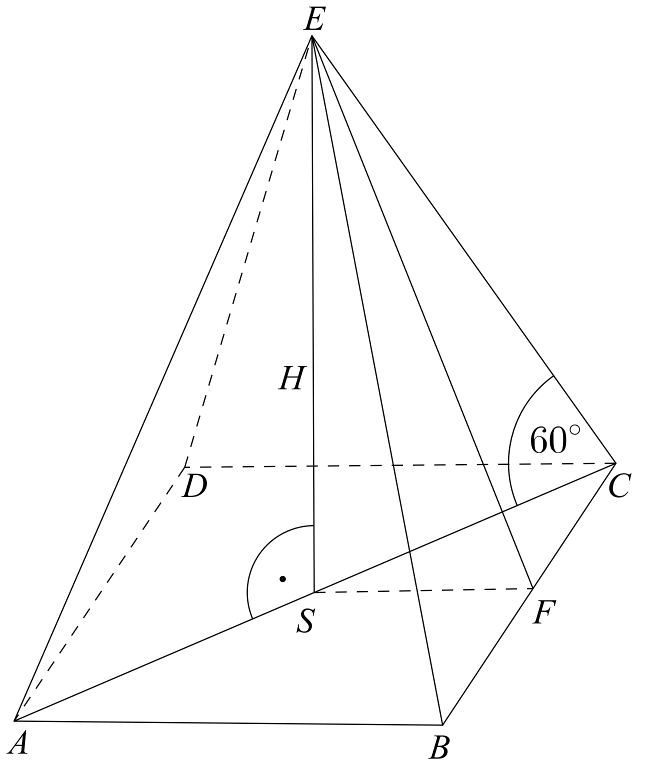
W trójkącie prostokątnym *EGD* mamy zatem:

$$tg\alpha = \frac{|DG|}{|EG|} = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}a}{6}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{6}} = \sqrt{3}.$$

Wobec tego kąt α ma miarę $60°$.

Zadanie 108.

Sporządźmy odpowiedni rysunek.



Wzór na pole powierzchni bocznej ma postać

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2}|BC| \cdot |EF| = 2|BC| \cdot |EF| = 2|AB| \cdot |EF|.$$

Wyznaczmy długość odcinka *AB*.

Rozważmy trójkąt prostokątny *SCE* o przyprostokątnych: *SC* oraz $SE = H$.

Odcinek *SC* jest połową przekątnej kwadratu o boku *AB*.

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{H}{|SC|},$$

$$\frac{H}{|SC|} = \sqrt{3}.$$

Tak więc $|SC| = \frac{\sqrt{3}H}{3}$.

Wtedy $|AC| = \frac{2\sqrt{3}H}{3}$ oraz $|AC| = |AB|\sqrt{2}$. Wynika z tego, że

$$|AB|\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{3}H}{3},$$

$$|AB|=\frac{\sqrt{6}H}{3}.$$

Wyznaczmy teraz długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa $|EF|$.

Rozważmy trójkąt prostokątny *SFE*:

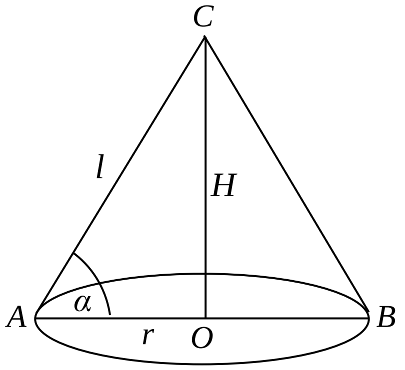
$$|EF|=\sqrt{|SE|^2+|SF|^2}, \quad \text{gdzie} \quad |SF|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{\sqrt{6}H}{6}.$$

$$|EF|=\sqrt{H^2+\left(\frac{\sqrt{6}H}{6}\right)^2}=\sqrt{H^2+\frac{H^2}{6}}=\frac{\sqrt{42}H}{6}.$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe

$$P=2\cdot\frac{\sqrt{6}H}{3}\cdot\frac{\sqrt{42}H}{6}=\frac{2\sqrt{7}H^2}{3}.$$

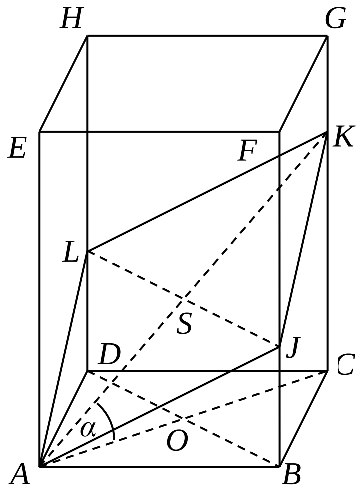
Zadanie 109.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Z definicji funkcji trygonometrycznej dla danego kąta α w trójkącie prostokątnym *COB* mamy: $\cos\alpha=\frac{r}{l}$. Z warunków zadania mamy: $l-r=6$ oraz $\frac{2}{5}=\frac{r}{l}$. Zatem otrzymujemy równanie: $l-\frac{2}{5}\cdot l=6$ albo równanie $\frac{5}{2}\cdot r-r=6$. Przekształcając je w sposób równoważny, otrzymujemy $l=10$ oraz $r=4$.

Zatem pole powierzchni stożka jest równe: $P_b=\pi\cdot 4\cdot 10=40\pi$.

Zadanie 110.



Przekrój jest czworokątem *AJKL* i punkt *K* znajduje się poniżej punktu *G*. Zwiększając kąt α, otrzymamy czworokąt „graniczny”, gdy $K = G$. Dalsze zwiększanie kąta spowodowałoby powstanie przekroju w postaci pięciokąta (a następnie trójkąta); „graniczny kąt α_0” to kąt o wierzchołku *A* w trójkącie *ACG*. Wyznaczamy miarę tego kąta:

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{|CG|}{|AC|} = \frac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

stąd $\alpha_0 = 60°$. Zatem dziedziną funkcji pola przekroju jest przedział $\langle 0°,\ 60° \rangle$.

Wprowadzamy oznaczenia *S* oraz *O* na punkty przecięcia się odpowiednio odcinków *LJ* z *AK* i AC *z BD*. Odcinek *SO* jest równoległy do odcinka *KC*, więc trójkąty prostokątne *AOS* oraz *ACK* o wspólnym kącie *CAK* są podobne. Wobec powyższego otrzymujemy, że $\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|AS|}{|SK|}$, a to oznacza, że $|AS| = |SK|$. Przekątne czworokąta *AJKL* połowią się oraz $|AJ| = |AL|$, więc jest on rombem. Wyznaczamy długości przekątnych tego rombu.

W trójkącie prostokątnym *ACK* mamy $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{|AK|}$, stąd $|AK| = \frac{5\sqrt{2}}{\cos\alpha}$, zaś $|LJ| = 5\sqrt{2}$. Obliczamy pole przekroju:

$$P(\alpha) = \frac{1}{2}|AK| \cdot |LJ| = \frac{5\sqrt{2}}{2\cos\alpha} \cdot 5\sqrt{2},$$

$$P(\alpha) = \frac{25}{\cos\alpha},$$

gdzie $\alpha \in \langle 0°,\ 60° \rangle$. Przy czym dla $\alpha = 0°$ otrzymujemy podstawę *ABCD*.

Uwaga: Można też wykorzystać fakt, że rzutem figury *AJKL* jest *ABCD*, więc

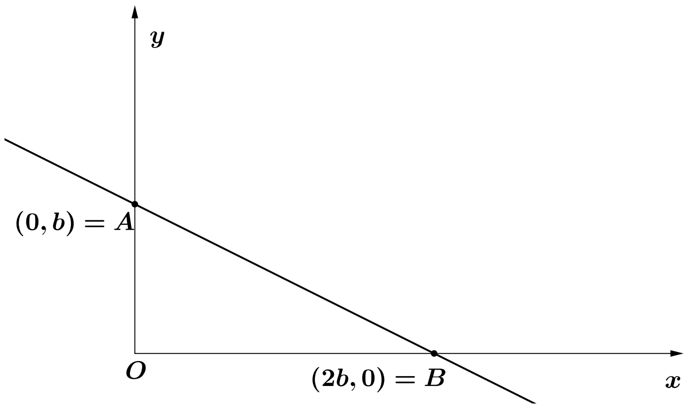
$$P_{AJKL}(\alpha) = \frac{P_{ABCD}}{\cos\alpha} = \frac{25}{\cos\alpha}.$$

Zadanie 111.

Punkt przecięcia prostej $y = -\frac{1}{2}x + b$ z osią *Oy* ma współrzędne $A = (0, b)$.

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia prostej z osią *Ox*:

$0 = -\frac{1}{2}x + b$, $-\frac{1}{2}x = -b$, stąd $x = 2b$. Punkt *B* ma więc współrzędne $B = (2b, 0)$.



Trójkąt *AOB* jest prostokątny i $|AO| = b$ oraz $|BO| = 2b$.

Pole trójkąta *AOB* jest równe 16, więc mamy

$$\frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| = 16,$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot 2b = 16,$$

czyli $b^2 = 16$, stąd $b = 4$.

Zapisujemy współrzędne punktów *A* i *B*: $A = (0, 4)$, $B = (8, 0)$.

Środek przeciwprostokątnej *AB* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym *AOB*.

Obliczamy współrzędne *S* środka odcinka *AB*:

$$S = \left(\frac{2b}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \text{czyli} \quad S = (4, 2).$$

Zadanie 112.

D

Zadanie 113.

D

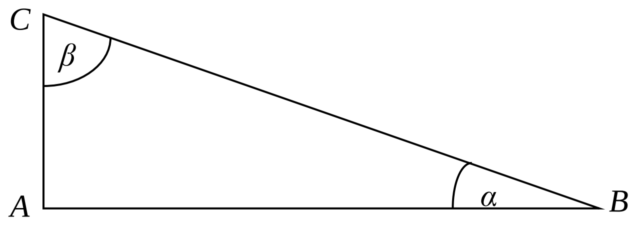
Zadanie 114.

C

Zadanie 115.

Sposób I

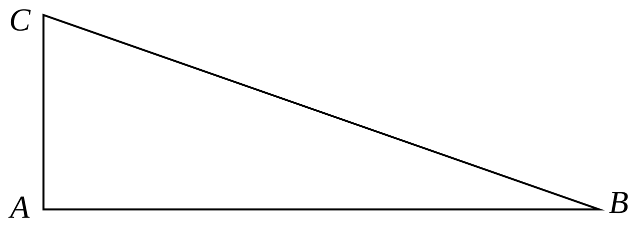
Wykonajmy rysunek i wprowadźmy oznaczenia:



Z założenia $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, niech więc $|AC| = x$ oraz $|BC| = 3x$, gdzie $x > 0$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy wówczas $|AB| = 2\sqrt{2}x$, skąd otrzymujemy $\mathrm{tg}(\beta) = \frac{|AB|}{|AC|} = 2\sqrt{2}$.

Sposób II

Wykonajmy rysunek:



$$\cos(\angle ACB) = \frac{|AC|}{|BC|} = \sin(\angle ABC) = \frac{1}{3}.$$

$$\sin^2(\angle ACB) + \cos^2(\angle ACB) = 1,$$

zatem

$$\sin^2(\angle ACB) = 1 - \cos^2(\angle ACB) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

skąd otrzymujemy $\sin(\angle ACB) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (bierzemy dodatni pierwiastek, ponieważ kąt *ACB* jest ostry).

Ostatecznie

$$tg(\angle ACB)=\frac{\sin(\angle ACB)}{\cos(\angle ACB)}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}.$$

Zadanie 116.
C

Zadanie 117.

Środkowa poprowadzona do boku *AB* przechodzi przez wierzchołek *C* oraz przez środek boku *AB*. Zaczniemy zatem od wyznaczenia środka *S* boku *AB*:

$$S=\left(\frac{(-1)+5}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(2,-1).$$

Pozostaje wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty *C* i *S*. Równanie ma postać $y=ax+b$.

Korzystamy ze wzoru lub rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2=a\cdot 3+b \\ -1=a\cdot 2+b \end{cases}$$

Otrzymujemy rozwiązanie: $a=3,\ b=-7$.

Tak więc środkowa poprowadzona do boku *AB* w trójkącie *ABC* jest opisana równaniem $y=3x-7$.

Zadanie 118.

Wyznaczamy punkt przecięcia prostej $x=-1$ z wykresem funkcji *f*:

$$f(-1)=10,$$

zatem prosta i wykres przecinają się w punkcie $(-1,10)$.

Wyznaczamy punkt przecięcia prostej $x=2$ z wykresem funkcji *f*:

$$f(2)=1,$$

zatem prosta i wykres przecinają się w punkcie $(2,1)$.

Pozostaje obliczyć odległość *d* między dwoma obliczonymi punktami:

$$d=\sqrt{(2-(-1))^2+(1-10)^2}=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$

Zadanie 119.

W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych obrazem punktu (x,y) jest punkt $(-x,-y)$.

Prosta *k* dana równaniem $y=2x+1$ składa się z punktów postaci $(x,2x+1)$ i każdy z nich przechodzi na punkt postaci $(-x,-2x-1)$. Obrazem prostej *k* jest więc prosta złożona z punktów postaci $\left(-x,\,-2x-1\right)=\left(-x,\,2(-x)-1\right)$, czyli takich, w których druga współrzędna powstaje z pierwszej przez pomnożenie przez 2 i odjęcie 1. Inaczej mówiąc, obrazem prostej k jest prosta złożona z punktów $\left(x,\,y\right)$ spełniających równanie $y=2x-1$. Prosta k i jej obraz mają równe współczynniki kierunkowe, a przy tym są różne, zatem są równoległe.

Uwaga: Można też wybrać dwa dowolne punkty należące do prostej $y=2x+1$, przekształcić je w symetrii środkowej względem punktu (0,0) i napisać równanie prostej przechodzącej przez wyznaczone obrazy punktów.

3.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 121.

D

Zadanie 122.

I sposób rozwiązania

W zbiorze A jest n liczb parzystych i $n+1$ liczb nieparzystych.

Suma dwóch liczb naturalnych jest parzysta, gdy obie liczby są parzyste albo obie są nieparzyste.

Suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta, gdy jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta.

Liczba par, których suma jest parzysta, jest równa $n\left(n-1\right)+\left(n+1\right)\cdot n=2n^2$.

Liczba par, których suma jest nieparzysta, jest równa $n\left(n+1\right)+\left(n+1\right)\cdot n=2n^2+2n$.

Teza wynika z faktu, że $2n^2+2n>2n^2$ dla $n\geq 1$.

II sposób

W zbiorze A jest n liczb parzystych i $n+1$ liczb nieparzystych.

Suma dwóch liczb naturalnych jest parzysta, gdy obie liczby są parzyste albo obie są nieparzyste.

Liczba par, których suma jest parzysta, jest równa $n\left(n-1\right)+\left(n+1\right)\cdot n=2n^2$.

Liczba wszystkich par jest równa $\left(2n+1\right)\cdot 2n=4n^2+2n$.

Stąd wynika, że liczba par, których suma jest nieparzysta, jest równa

$$4n^2+2n-2n^2=2n^2+2n\,.$$

Teza wynika z faktu, że $2n^2+2n>2n^2$ dla $n\geq 1$.

III sposób

W zbiorze A jest n liczb parzystych i $n+1$ liczb nieparzystych.

Suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta, gdy jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta.

Liczba par, których suma jest nieparzysta, jest równa $n(n+1)+(n+1)\cdot n=2n^2+2n$.

Liczba wszystkich par jest równa $(2n+1)\cdot 2n=4n^2+2n$.

Stąd wynika, że liczba par, których suma jest parzysta, jest równa $4n^2+2n-2n^2-2n=2n^2$.

Teza wynika z faktu, że $2n^2+2n>2n^2$ dla $n\geq 1$.

Zadanie 123.

C

Zadanie 124.

Obliczamy średnią arytmetyczną $\overline{x}$ drugiego zestawu danych (nie podstawiamy za s):

$$\overline{x}=\frac{\frac{x_1-a}{s}+\frac{x_2-a}{s}+\frac{x_3-a}{s}+\ldots+\frac{x_n-a}{s}}{n}=\frac{x_1-a+x_2-a+x_3-a+\ldots+x_n-a}{ns}=$$

$$=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-na}{ns}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{ns}-\frac{na}{ns}=$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}-\frac{a}{s}=\frac{a}{s}-\frac{a}{s}=0.$$

Zadanie 125.

Przyjmijmy oznaczenie:

x — ocena z czwartej klasówki.

Średnia arytmetyczna otrzymanych ocen jest równa $\frac{6+4+4+x}{4}=\frac{14+x}{4}$.

$$\sigma^2=\frac{6^2+4^2+4^2+x^2}{4}-\left(\frac{14+x}{4}\right)^2=\frac{68+x^2}{4}-\left(\frac{14+x}{4}\right)^2.$$

Ponieważ odchylenie standardowe jest równe $\sqrt{\frac{11}{16}}$, to otrzymujemy kolejno:

$$\frac{68+x^2}{4}-\left(\frac{14+x}{4}\right)^2=\frac{11}{16},$$

$$\frac{272+4x^2-196-28x-x^2}{16}=\frac{11}{16},$$

$$3x^2-28x+76=11,$$

$$3x^2-28x+65=0,$$

$$\Delta=784-780=4,$$

$$x_1=\frac{28+2}{6}=5,$$

$$x_1 = \frac{28-2}{6} = \frac{26}{6}.$$

Rozwiązanie $\frac{26}{6}$ nie spełnia warunków zadania.

Odpowiedź: Z czwartej klasówki Adam otrzymał ocenę 5.

Zadanie 126.

B

Zadanie 127.

C

Zadanie 128.

B

Zadanie 129.

B

Zadanie 130.

Tabela przedstawiona na rysunku jest wyznaczona przez 7 prostych poziomych i 10 prostych pionowych. Prostokątna tabela o czterech wierszach i czterech kolumnach opisana w treści zadania jest jednoznacznie wyznaczona, np. przez podanie „dolnej” prostej poziomej wyznaczającej tabelę oraz „lewej” prostej pionowej wyznaczającej tabelę.

Zgodnie z treścią zadania „dolną” prostą można wybrać na 3 sposoby oraz „lewą” prostą mogę wybrać na 6 sposobów. Stąd wynika, że jest $3 \cdot 6 = 18$ tabel opisanych w treści zadania.

Zadanie 131.

I sposób

Jest to model klasyczny. Obliczamy liczbę wszystkich losów tej loterii:

$$99999 - 9999 = 90000.$$

Ponieważ losujemy jeden los, moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 90000$. Niech zdarzenie A oznacza wylosowanie losu przegrywającego. Obliczamy liczbę losów o sumie cyfr 3; są to losy o numerach: 30000, 21000, 20100, 20010, 20001, 12000, 10200, 10020, 10002, 11100, 11010, 11001, 10110, 10101 oraz 10011. Tych losów jest 15. Zatem losów przegrywających jest

$$90000 - 15 = 89985,$$

stąd $|A| = 89985$.

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu przegrywającego jest równe

$$P(A) = \frac{89985}{90000} = 0,9998(3) \approx 0,9998 .$$

II sposób

Jest to model klasyczny. Obliczamy ile jest wszystkich losów, czyli ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych. Zgodnie z regułą mnożenia jest ich $9 \cdot 10^4 = 90000$, gdyż na pierwszym miejscu nie może stać 0, a potem wpisujemy dowolną cyfrę. Ponieważ losujemy jeden los, moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 90000$. Niech zdarzenie B oznacza wylosowanie losu o sumie cyfr 3, wtedy zdarzenie B' oznacza wylosowanie losu pustego. Obliczamy liczbę losów o sumie cyfr 3. Możliwe są przypadki:

a) na pierwszym miejscu trójka i następnie same zera; taka liczba jest jedna,

b) na pierwszym miejscu dwójka, a następnie jedna jedynka i zera, albo na odwrót — na pierwszym miejscu jedynka, a następnie jedna dwójka i zera; takich liczb jest $2 \cdot 4 = 8$,

c) na pierwszym miejscu jedynka, a następnie na czterech miejscach po dwie jedynki i dwa zera; takich liczb jest $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Łącznie mamy 15 liczb spełniających warunki zadania.

$$P(B) = \frac{15}{90000},$$

$$P(B') = 1 - \frac{15}{90000} = \frac{89995}{90000} = 0{,}9998(3) \approx 0{,}9998.$$

Zadanie 132.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, w którym losujemy jedną przekątną spośród wszystkich przekątnych trzynastokąta, jest równa

$$|\Omega| = 65.$$

Niech A oznacza zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu takiej przekątnej trzynastokąta, która przecina przekątną A_1A_8 w punkcie leżącym wewnątrz trzynastokąta.. Zauważmy, że końce takiej przekątnej muszą leżeć po przeciwnych stronach prostej A_1A_8. Ponieważ po jednej stronie tej prostej mamy 5, a po drugiej 6 wierzchołków trzynastokąta, to liczba tych przekątnych jest równa $5 \cdot 6$. Wobec tego liczba wszystkich przekątnych trzynastokąta, które przecinają przekątną A_1A_8 w punkcie leżącym wewnątrz trzynastokąta, jest równa

$$5 \cdot 6 = 30, \quad \text{czyli} \quad |A| = 30.$$

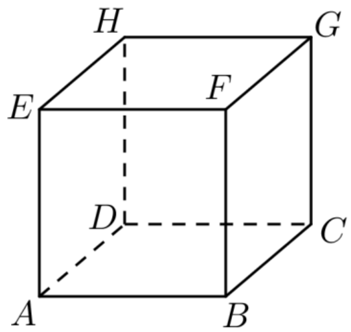
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}.$$

Zadanie 133.

I sposób

Oznaczamy przez *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* wierzchołki sześcianu (zobacz rysunek).



Wyniki losowania można przedstawić w tabeli. Pola położone na przekątnej odrzucamy, ponieważ nie możemy wylosować dwa razy tego samego wierzchołka.

Niech *X* oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch wierzchołków, które są końcami tej samej przekątnej ściany sześcianu (uwzględniamy kolejność wylosowanych wierzchołków). Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *X* zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
A			x			x		x
B				x	x		x	
C	x					x		x
D		x			x		x	
E		x		x			x	
F	x		x					x
G		x		x	x			
H	x		x			x		

Z tego wynika, że mamy 56 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$, oraz 24 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *X*, czyli $|X| = 8 \cdot 3 = 24$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia *X* jest równe $P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

II sposób

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia polegającego na losowaniu dwóch różnych wierzchołków sześcianu (bez uwzględniania kolejności wylosowania wierzchołków). Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$|\Omega| = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Niech X oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch wierzchołków, które są końcami tej samej przekątnej ściany sześcianu (nie uwzględniamy kolejności losowania wierzchołków). Każda z sześciu ścian sześcianu ma dwie przekątne, czyli $|X| = 6 \cdot 2 = 12$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia X jest równe $P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

Zadanie 134.

Prawidłowy ostrosłup pięciokątny ma dziesięć krawędzi: pięć krawędzi podstawy (oznaczamy je kolejnymi liczbami: 1,2,3,4,5) i pięć krawędzi bocznych (oznaczamy je kolejnymi liczbami: 6,7,8,9,10). Ω jest zbiorem wszystkich par (a,b) o wartościach w zbiorze $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ takich, że $a \neq b$. Jest to model klasyczny. $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$.

Oznaczmy przez A zdarzenie opisane w treści zadania.

Mamy dwa rozłączne przypadki:

— pierwsza wylosowana krawędź to krawędź boczna, a druga to krawędź boczna albo krawędź postawy,

— pierwsza wylosowana krawędź to krawędź podstawy, a druga to krawędź boczna albo krawędź postawy.

Stąd

$$|A| = 5 \cdot (4+2) + 5 \cdot (2+2) = 50$$

oraz

$$P(A) = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}.$$

Uwaga: Można też przedstawić rozwiązanie za pomocą tabeli o wymiarach 10 x 10, bez głównej przekątnej, albo za pomocą drzewa.

4. Wykaz umiejętności ogólnych i szczegółowych sprawdzanych zadaniami

4.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 1.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 1.9) Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Zadanie 2.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 3.5) Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą. PP 4.4) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$.

Zadanie 3.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 1.3) Uczeń posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. PP 1.4) Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zadanie 4.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 1.4) Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zadanie 5.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 1.4) Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zadanie 6.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 1.6) Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zadanie 7.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 1.6) Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zadanie 8.

Wymaganie ogólne	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PP 1.9) Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Zadanie 9.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 1.9) Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatek, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Zadanie 10.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 1.9) Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok). G 7.3) Uczeń rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Zadanie 11.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 1.9) Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Zadanie 12.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 1.9) Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Zadanie 13.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 1.6) Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zadanie 14.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 1.6) Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. PP 1.4) Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zadanie 15.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 3.2) Uczeń wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. PP 8.1) Uczeń wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).

Zadanie 16.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 3.2) Uczeń wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zadanie 17.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 3.2) Uczeń wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 18.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 3.2) Uczeń wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Zadanie 19.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 3.5) Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą. PP 4.9) Uczeń wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podsta-

	wie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 20.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 3.5) Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 21.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 3.5) Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 22.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$. PP 3.1) Uczeń sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności.

Zadanie 23.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.

Zadanie 24.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$. G 7.7) Uczeń za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Zadanie 25.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 3.5) Uczeń rozwiązuje nierówność kwadratową z jedną niewiadomą.

Zadanie 26.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 2.1) Uczeń oblicza wartości liczbowe wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Zadanie 27.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 1.4) Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

4.2. Funkcje

Zadanie 28.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 4.9) Uczeń wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zadanie 29.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.9) Uczeń wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zadanie 30.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.11) Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zadanie 31.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 4.4) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Zadanie 32.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 4.11) Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. PP 4.3) Uczeń odczytuje z wykresu własności funkcji

	(dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

Zadanie 33.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 4.11) Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zadanie 34.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.9) Uczeń wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zadanie 35.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.9) Uczeń wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). PP 8.6) Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

Zadanie 36.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 37.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 38.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 4.11) Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. PP 4.3) Uczeń odczytuje z wykresu funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak, punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

	PP 4.8) Uczeń szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru. PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 39.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 40.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej , w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej.

Zadanie 41.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.1) Uczeń określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego. PP 5.3) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 42.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 6.4) Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. PP 6.5) Uczeń, znając wartości jednej z funkcji sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zadanie 43.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 6.5) Uczeń, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zadanie 44.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 6.4) Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$.

Zadanie 45.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 6.4) Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$. PP 6.5) Uczeń, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zadanie 46.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 6.5) Uczeń, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zadanie 47.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 6.5) Uczeń, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego. PP 10.1) Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

Zadanie 48.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 6.4) Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$.

Zadanie 49.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 4.2) Uczeń oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość. PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.

Zadanie 50.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 51.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 4.11) Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

4.3. Ciągi

Zadanie 52.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 5.3) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 53.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 54.

Wymagania ogólne	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PP 5.2) Uczeń bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zadanie 55.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 5.3) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 56.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 5.3) Uczeń stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Zadanie 57.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 5.3) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 58.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 5.3) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 59.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 5.3) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 60.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 61.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 62.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 63.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 64.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 65.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 5.2) Uczeń bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. PP 4.2) Uczeń oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.

Zadanie 66.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 5.4) Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

4.4. Geometria

Zadanie 67.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 7.1) Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zadanie 68.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	G 11.2) Uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Zadanie 69.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt. PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zadanie 70.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 7.1) Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zadanie 71.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.1) Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zadanie 72.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.1) Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zadanie 73.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 7.1) Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zadanie 74.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 7.2) Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

Zadanie 75.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 7.2) Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

Zadanie 76.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.2) Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zadanie 77.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Zadanie 78.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekście praktycznym) cechy podobieństwa trójkątów.

Zadanie 79.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Zadanie 80.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekście praktycznym) cechy podobieństwa trójkątów.

Zadanie 81.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 7.4) Uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Zadanie 82.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.4) Uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Zadanie 83.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Zadanie 84.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Zadanie 85.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Zadanie 86.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka. PP 4.2) Uczeń oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania

	równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.

Zadanie 87.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zadanie 88.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zadanie 89.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.6) Uczeń oblicza odległość dwóch punktów. PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekście praktycznym) cechy podobieństwa trójkątów.

Zadanie 90.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 8.7) Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Zadanie 91.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 8.7) Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Zadanie 92.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.7) Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu. PP 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt. PP 8.4) Uczeń oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych. PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zadanie 93.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 8.7) Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Zadanie 94.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	G 11.2) Uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Zadanie 95.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 9.1) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów. G 10.13) Uczeń rozpoznaje wielokąty przystające i podobne.

Zadanie 96.

Wymaganie ogólne	I Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PP 9.4) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami.

Zadanie 97.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.4) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami.

Zadanie 98.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.2) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.

Zadanie 99.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.2) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Zadanie 100.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.4) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami. PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zadanie 101.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.1) Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów. PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Zadanie 102.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.3) Uczeń rozpoznaje w walcach i w stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów. PP 6.1) Uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Zadanie 103.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 10.14) G Uczeń stosuje cechy przystawania trójkątów.

Zadanie 104.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 9.3) Uczeń rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oblicza miary tych kątów.

Zadanie 105.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 9.5) Uczeń określa, jaką figurą jest przekrój prostopadłościanu płaszczyzną. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zadanie 106.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości. PP 6.1) Uczeń opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami.

Zadanie 107.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zadanie 108.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów

Zadanie 109.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zadanie 110.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 9.5) Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zadanie 111.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zadanie 112.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 8.6) Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

Zadanie 113.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekście praktycznym) cechy podobieństwa trójkątów.

Zadanie 114.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.6) Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

Zadanie 115.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 6.5) Uczeń, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zadanie 116.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 7.2) Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

Zadanie 117.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka. PP 8.1) Uczeń wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).

Zadanie 118.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 8.6) Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

Zadanie 119.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 8.7) Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.)w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

4.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 120.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 10.3) Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zadanie 121.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 10.1) Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standar-

	dowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje parametry dla danych empirycznych.

Zadanie 122.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę dodawania i mnożenia.

Zadanie 123.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 10.1) Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje parametry dla danych empirycznych.

Zadanie 124.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PP 10.1) Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

Zadanie 125.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 10.1) Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 126.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę dodawania i mnożenia.

Zadanie 127.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zadanie 128.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę dodawania i mnożenia.

Zadanie 129.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, nie wymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zadanie 130.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę dodawania i mnożenia.

Zadanie 131.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 10.3) Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. PP 10.2) Uczeń zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zadanie 132.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 10.3) Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zadanie 133.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 10.3) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zadanie 134.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 10.3) Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.